DOI: 10.25728/mlsd.2023.1672

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ОТКРЫТОГО РЫНКА С ЭЛАСТИЧНОСТЯМИ СТЕПЕННОГО ВИДА[1]

Котюков А.М.[1], Павлова Н.Г.[1,2]
[1]*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*
[2]*Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Тамбов, Россия*
amkotyukov@mail.ru, natasharussia@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается модель открытого рынка с эластичностями как функциями цены, имеющими степенной вид. Для этой модели получены достаточные условия существования положения равновесия. Результаты подкреплены численным экспериментом.

Ключевые слова: равновесие, спрос, предложение, накрывающее отображение, точка совпадения.

Введение

Положение равновесия является центральным объектом исследования современной экономики. Под положением равновесия понимается ситуация, при которой весь товар, который был доставлен на рынок, продан, и при этом спрос на товары на рынке полностью удовлетворен.

Рассмотрим рынок, состоящий из двух групп участников – производителей и потребителей. Производители создают товары и продают потребителям. Совокупный объем произведенного товара называется предложением, а совокупный объем этого товара, необходимый потребителям – спросом. Если спрос на рынке превышает предложение, возникает дефицит товара, который отрицательно сказывается на благосостоянии потребителей в регионе. Если же предложение превышает спрос, то избыток товаров на рынке отрицательно сказывается на прибыли производителей, вследствие чего происходит сокращение производства и застой экономического прогресса. Таким образом, благоприятной мы будем считать такую ситуацию на рынке, при которой спрос на каждый вид товара будет равен его предложению. Такая ситуация на рынке называется равновесной, а цены на товары, при которых такое положение реализуется – равновесными ценами, или положением равновесия.

Исторически идея положения равновесия приписывается А. Смиту [1]. В труде «Исследование о причинах богатства наций» 1776 года Смит отмечает, что каждый участник рынка, преследуя свой собственный интерес, невольно способствует достижению общественного благосостояния, даже если это не входит в его намерения. Следующим уточнением концепции экономического равновесия может служить труд Ж.-Б. Сэя [2], который в работе «Трактат по политической экономии» 1803 года пишет, что дефицит одного вида товаров компенсируется профицитом другого вида, и что рынок всегда находится в состоянии равновесия. Первую математическую формулировку положению равновесия придал Л. Вальрас [3]: в труде «Элементы чистой политической экономии» 1874 года он излагает закон, который лег в основу понятия экономического равновесия: для достижения равновесия на рынке необходимо и достаточно, чтобы действительный спрос на этот товар был равен его предложению. Однако математический аппарат не был достаточно развит для получения содержательных результатов по данному вопросу. Появление теоремы Брауэра о неподвижной точке и ее следствия в виде теоремы Какутани позволили К. Эрроу и Ж. Дебре в 1954 году получить первые достаточные условия существования положения равновесия в математической модели рынка [4].

Исследование данного вопроса имеет как практическую, так и теоретическую значимость. С теоретической точки зрения результаты исследования предоставляют основу для дальнейшего изучения моделей открытого рынка. С практической точки зрения полученные результаты могут быть использованы на реальных данных для анализа текущей рыночной ситуации и прогноза цен в будущем.

В работах [5, 6] авторами был продемонстрирован подход к исследованию моделей рынка с помощью результатов теории накрывающих отображений и точек совпадения. В них положение равновесия рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения. Так, в [5] с помощью теоремы о точках совпадения были получены содержательные результаты о существовании положения равновесия в математической модели рынка типа Эрроу–Дебре, в которой функция предложения восстанавливается как решение задачи максимизации прибыли производителей, а

[1] *Теорема 1 получена Павловой Н.Г. при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/ в Тамбовском государственном университете имени Г. Р. Державина. Теорема 3 получена Котюковым А.М. при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/ в ИПУ РАН.*

функция спроса – как решение задачи максимизации функции полезности потребителей. В [6] была рассмотрена аналогичная модель, в которой дополнительно были введены транзакционные издержки – затраты, направленные на поддержание доставки товаров на рынок. Для нее также были получены достаточные условия существования положения равновесия. Подход, предложенный этими авторами, используется и в настоящей работе.

В работах [7–10] отображения спроса и предложения восстанавливаются по известным эластичностям спроса и предложения по цене соответственно. Эластичность спроса по цене показывает, на сколько в процентном эквиваленте изменяется спрос на товар при соответствующем изменении цены на этот или другой товар. Аналогично определяется экономический смысл эластичности предложения по цене. В этих работах эластичности спроса и предложения по цене являются постоянными величинами, что может негативно сказываться на моделировании реальных рынков, поскольку в зависимости от цен производители могут и потребители могут по-разному реагировать на их изменение.

В данной работе мы используем теорию накрывающих отображений и точек совпадения для исследования более общей модели открытого рынка, в которой эластичности спроса и предложения являются функциями цены, а не постоянными величинами. Такое рассмотрение позволяет получить более точное описание поведения рынка моделируемого региона.

1. Описание модели

Обозначим $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1,n}\}$. Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров на рынке, цены на которые описываются вектором $p \in \mathbb{R}_+^n$, на который накладываются естественные ограничения: известны векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^n$, $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n})$, $c_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n})$ такие, что:

$$0 < c_{1i} < c_{2i}, \qquad c_{1i} \le p_i \le c_{2i}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Эти векторы задают ограничения на цены. Обозначим $P = [c_{11}, c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$.

Рассмотрим отображения спроса $D: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$, $D(p) = (D_1(p), \dots, D_n(p))$ и предложения $S: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$, $S(p) = \big(S_1(p), \dots, S_n(p)\big)$. Пусть известны векторы p^*, D^*, $S^* \in \mathbb{R}_+^n$, $D^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$, $S^* = (S_1^*, \dots, S_n^*)$ такие, что

$$D^* = D(p^*), \tag{1}$$

$$S^* = S(p^*). \tag{2}$$

Эти векторы имеют следующий экономический смысл: p^* – известные цены на товары, а S^* и D^* – значения спроса и предложения при этих ценах. Пусть также известен вектор импорта $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ такой, что $a_i \ge 0\ \forall i = \overline{1,n}$ и $\exists i: a_i > 0$. Здесь a_i – это количество i-го товара, который импортируется на рынок.

Наконец, пусть известны отображения $\mathcal{E}$, $\tilde{\mathcal{E}}: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ с образами-матрицами, состоящими из элементов $E_{ij}(p)$, $\tilde{E}_{ij}(p): \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$,

$$E_{ij}(p) = \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}}, \tilde{E}_{ij}(p) = \tilde{\lambda}_{ij} p_j^{\tilde{\chi}_{ij}},$$

где $\lambda_{ij}, \tilde{\lambda}_{ij}, \chi_{ij}, \tilde{\chi}_{ij} \in \mathbb{R}$. Обозначим $\widetilde{\Lambda} = (\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Эти параметры имеют следующую экономическую интерпретацию: E_{ij} являются эластичностями спроса на i-й товар по цене на j-й товар, а $\tilde{E}_{ij}$ являются эластичностями предложения i-го товара по цене на j-й товар.

Определение 1. Моделью открытого рынка с эластичностями степенного вида σ мы назовем следующий набор параметров:

$$\sigma = \big(a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}\big).$$

Теорема 1. Набор параметров σ однозначно определяет отображения спроса D и предложения S по формулам:

$$D_i(p) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}}\left(p_j^{\chi_{ij}} - \left(p_j^*\right)^{\chi_{ij}}\right)\right), \qquad i = \overline{1,n}; \tag{3}$$

$$S_i(p) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\chi}_{ij}}\left(p_j^{\tilde{\chi}_{ij}} - (p_j^*)^{\tilde{\chi}_{ij}}\right)\right), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Отображения D и S, определенные формулами (3), (4) являются решениями систем уравнений в частных производных

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij}(p)D_i(p)}{p_j}, \qquad i,j = \overline{1,n}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\tilde{E}_{ij}(p)S_i(p)}{p_j}, \qquad i,j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

с начальными условиями (1), (2) соответственно.

Доказательство. Приведем доказательство для отображения D. Пусть задана модель σ. Докажем, что (3) является решением (5). Для этого вычислим:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) = D_i^* \lambda_{ij} \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\lambda_{ij}(p_j - p_j^*)\right), \qquad i,k = \overline{1,n}.$$

Подставим это выражение в (5) и получим:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k} = \frac{\lambda_{ik}}{p_k} D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij} p_k^{\chi_{ik}}}{\chi_{ij}}\left(p_j^{\chi_{ij}} - (p_j^*)^{\chi_{ij}}\right)\right) = \lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}} \frac{D_i(p)}{p_k}, i = \overline{1,n}.$$

Более того,

$$D_i(p^*) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}}\left((p_j^*)^{\chi_{ij}} - (p_j^*)^{\chi_{ij}}\right)\right) = D_i^*, i = \overline{1,n}.$$

Теперь докажем, что решение задачи (1),(5) единственно. Для этого рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} d\left(D_i(p) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}}\right)\right) \\ = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}}\right) - D_i(p) \frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} dp_k \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}}\right)\right) \\ = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} D_i(p) - D_i(p) \frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k}\right) dp_k \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}}\right) = 0, i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна следующей системе:

$$D_i(p) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}}\right) = C_i, i = \overline{1,n};$$

где $C_i \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Эта система, в свою очередь, должна удовлетворять условию (1), т.е.

$$D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{-\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} (p_j^*)^{\chi_{ij}}\right) = C_i, i = \overline{1,n}.$$

Поскольку выражение для C_i в последнем равенстве определено единственным образом, все системы выше в силу эквивалентности имеют единственное решение.

2. Накрывающие отображения и точки совпадения

Для получения основного результата нам потребуются некоторые утверждения из теории накрывающих отображений и точек совпадения. Начнем с определения накрывающего отображения. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – метрические пространства и Ψ, Φ – отображения, действующие из X в Y. В пространстве X через $B_X(x,r)$ обозначим замкнутый шар в точке x радиуса r, аналогично определим $B_Y(y,r)$ в пространстве Y.

Определение 2 ([11]). Пусть $\alpha>0$. Отображение $\Psi: X\to Y$ называется α-накрывающим, если

$$\Psi\big(B_X(x,r)\big)\supseteq B_Y(\Psi(x),\alpha r)\ \forall x\in X, \forall r>0.$$

Определение 3 ([11]). Пусть $\alpha>0$. Отображение $\Psi: X\to Y$ называется α-накрывающим на множестве $M\subseteq X$, если $\forall x\in M$, $r>0$ таких, что $B_X(x,r)\subseteq M$, выполнено включение

$$B_Y(\Psi(x),\alpha r)\subseteq\Psi\big(B_X(x,r)\big).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha>0$, что отображение Ψ является α-накрывающим на M, обозначим через $\operatorname{cov}(\Psi|M)$.

Определение 4 ([11]). Пусть $\alpha>0$. Отображение Ψ называется α-накрывающим в точке $x\in \operatorname{int}M\subset X$, если $\forall\varepsilon>0$ существует $\delta\in(0,\varepsilon)$ такое, что $B_X(x,\delta)\subseteq M$ и

$$B_Y(\Psi(x),\alpha\delta)\subseteq\Psi(B_X(x,\delta).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha>0$, что отображение Ψ является α-накрывающим в точке $x\in X$, обозначим через $\operatorname{cov}(\Psi|x)$.

Замечание 1 ([5]). Если множество $M\subset X$ является замкнутым шаром ненулевого радиуса, то

$$\operatorname{cov}(\Psi|M)=\inf_{x\in\operatorname{int}M}\operatorname{cov}(\Psi|x).$$

Замечание 2. В [11] было показано, что если X, Y – банаховы пространства, а $\Psi: X\to Y$ строго дифференцируемо в каждой точке открытого множества $M\subset X$ и $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x)$ является α-накрывающим в каждой точке $x\in M$ с общей константой $\alpha>0$, то отображение Ψ является α'-накрывающим на M с любой константой $\alpha'<\alpha$, т.е.

$$\operatorname{cov}(\Psi|x)=\operatorname{cov}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x)\right).$$

Замечание 3 ([12]). В случае, когда отображение Ψ является линейным сюръективным оператором из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, справедлива следующая оценка:

$$\operatorname{cov}\Psi\geq\frac{1}{\|\Psi^*(\Psi\Psi^*)^{-1}\|},$$

где Ψ^* – оператор, сопряженный к Ψ.

Здесь и далее норма произвольного линейного оператора $Q: X\to Y$ определена формулой $\|Q\|=\sup\limits_{\|x\|_X=1}\|Qx\|_Y$.

Определение 5 ([11]). Точка $\xi\in X$ называется точкой совпадения отображений $\Psi,\Phi: X\to Y$, если

$$\Psi(\xi)=\Phi(\xi).$$

Сформулируем условия, гарантирующие существования точки совпадения для двух отображений, одно из которых является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2 (Теорема 1, [8])**.** Пусть пространство X полно и заданы $x_0\in X$, $\alpha>0$, $R>0$. Пусть отображение $\Psi: X\to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x_0,R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta<\alpha$ и любого отображения $\Phi: B_X(x_0,R)\to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y\big(\Psi(x_0),\Phi(x_0)\big)\leq(\alpha-\beta)R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi\in X$, т.е. $\Psi(\xi)=\Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_Y(x_0,\xi)\leq\frac{\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)}{\alpha-\beta}.$$

3. Достаточные условия существования положения равновесия

Теорема 2 о точках совпадения двух отображений позволяет получить достаточные условия существования положения равновесия в описанной выше модели. Введем обозначения:

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \min_{p\in P}\left(\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{*}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{*}\right)^{-1}\right\|\right)^{-1},$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} D_i^{*}\prod_{j=1}^{n}\max_{m=1,2}\left(\exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}}\left(c_{mj}^{\chi_{ij}} - (p_j^{*})^{\chi_{ij}}\right)\right)\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{2k}-c_{1k}}{2}\frac{|\lambda_{ik}|}{c_{1k}},$$

$$\bar{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}}|S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|,$$

где $\tilde{c} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$.

Теорема 3. *Пусть параметры модели σ удовлетворяют условиям:*

1) *матрица $\widetilde{\Lambda}$ обратима;*
2) $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$.

Тогда в модели σ существует положение равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

Доказательство. Введем следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}}\frac{|x_i|}{c_{2i}-c_{1i}}, x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\|y\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}}|y_i|, y = (y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X,ρ_X), (Y,ρ_Y), где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Заметим, что в силу замечания 1 имеем

$$\operatorname{cov}(S|P) = \min_{p\in P}\operatorname{cov}(S|p).$$

Далее, в силу замечания 2

$$\operatorname{cov}(S|p) = \operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right).$$

Наконец, в силу замечания 3 имеем

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right) \geq \left(\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{*}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{*}\right)^{-1}\right\|\right)^{-1} = \tilde{\alpha}(p).$$

Таким образом,

$$\operatorname{cov}(S|P) = \min_{p\in P}\operatorname{cov}(S|p) \geq \min_{p\in P}\tilde{\alpha}(p) = \bar{\alpha}(\sigma).$$

Через $\operatorname{lip}(B|P)$ обозначим точную верхнюю грань всех тех чисел $\beta > 0$, что отображение D удовлетворяет на P условию Липшица с константой β. Оценим ее, предварительно вычислив норму $\partial D/\partial p(p)$. Имеем:

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| = \max_{\|x\|_1=1}\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(x)\right\| = \max_{\|x\|_1=1}\max_{i=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p)x_j\right|.$$

Подставляя сюда выражение $\partial D_i/\partial p_j$ из (5), мы получим

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| = \max_{\|x\|_1=1}\max_{i=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{ij}p_j^{\chi_{ij}}D_i(p)}{p_j}x_j\right|.$$

Теперь подставляя выражение для $D_i(p)$ из (3), мы получим

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}-1} x_j D_i^* \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ik}}{\chi_{ik}}\left(p_k^{\chi_{ik}} - (p_k^*)^{\chi_{ik}}\right)\right)\right|.$$

Оценим величины p_j и p_k через компоненты векторов c_1 и c_2 соответственно

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{ij}| \max\left\{c_{1j}^{\chi_{ij}-1}, c_{2j}^{\chi_{ij}-1}\right\} D_i^* \prod_{k=1}^{n} \max_{m=1,2} \exp\left(\frac{\lambda_{ik}}{\chi_{ik}}\left(c_{mk}^{\chi_{ik}} - (p_k^*)^{\chi_{ik}}\right)\right) = \bar{\beta}(\sigma).$$

Таким образом,

$$\operatorname{lip}(D|P) = \max_{p\in P} \left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| \le \bar{\beta}(\sigma).$$

Из неравенств

$$\operatorname{cov}(D|P) \ge \bar{\alpha}(\sigma), \operatorname{lip}(S|P) \le \bar{\beta}(\sigma)$$

и условия 2) следует, что существуют такие α и β такие, что $\bar{\beta}(\sigma) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma)$, отображение S является α-накрывающим на P, а отображение D удовлетворяет условию Липшица на P с константой β. Так как P – полное метрическое пространство, то по Теореме 2 существует вектор $p^0 \in \operatorname{int} P$ такой, что

$$S(p^0) + a = D(p^0)$$

и

$$\rho_X(p^0, \tilde{c}) \le \frac{\rho_Y\big(D(\tilde{c}), S(\tilde{c})\big)}{\alpha - \beta} < 1$$

в силу условия 2). Следовательно, в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

4. Частный случай

Теперь рассмотрим модель σ', в которой

$$\chi_{ij} = 1, \tilde{\chi}_{ij} = 1, \qquad i,j = \overline{1,n}.$$

В данной модели эластичности являются линейными функциями от цены, что является классическим примером во многих учебниках по экономике. В данной модели функции спроса D и предложения S имеют вид:

$$D_i(p) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\lambda_{ij}(p_j - p_j^*)\right),$$

$$S_i(p) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\tilde{\lambda}_{ij}(p_j - p_j^*)\right),$$

где $i = \overline{1,n}$.

В данной модели мы можем гарантировать единственность положения равновесия. Достаточные условия дает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть параметры модели σ' удовлетворяют следующим условиям:*

1) *матрица $\tilde{\Lambda}$ невырождена;*
2) $\bar{\gamma}(\sigma') < \bar{\alpha}(\sigma') - \bar{\beta}(\sigma')$.

Тогда в модели σ' существует единственное положение равновесия.

Доказательство. Сначала покажем, что отображение S является биективным. Для этого рассмотрим уравнение

$$S(p) = s,$$

или систему

$$S_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\tilde{\lambda}_{ij}\big(p_j - p_j^*\big)\right) = s_i, i = \overline{1,n}, s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Взяв логарифм от левой и правой частей каждого уравнения этой системы, мы получим

$$\ln S_i^* + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_{ij}(p_j - p_j^*) = \ln s_i\,, i = \overline{1,n}.$$

Отсюда мы получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_{ij} p_j = \ln \frac{s_i}{S_i^*} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_{ij} p_j^*\,, i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Поскольку матрица $\widetilde{\Lambda}$ невырождена, система (7) имеет единственное решение

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}_{ij} \ln \frac{s_j}{S_j^*} + p_i^*\,, j = \overline{1,n},$$

где $\tilde{\mu}_{ij}$ – элемент матрицы, обратной к $\widetilde{\Lambda}$.

Таким образом, отображение S является биекцией. Рассмотрим оператор $B\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$, определенное формулой:

$$B = S^{-1} \circ (D - a).$$

Поскольку отображение D также биективно (что доказывается совершенно аналогично), мы получаем, что B биективно как композиция биективных отображений. В силу условия 2) по теореме 3 мы получаем, что уравнение $B(p) = p$ имеет решение. Наконец, так как B биективно, это решение единственно.

Следующий пример показывает, что в случае с моделью σ положение равновесия может быть не единственным.

Пример. Пусть в модели σ' $n = 2$,

$$a = (0{,}0), \qquad c_1 = (1, 0.5), \qquad c_2 = (5, 8),$$
$$p^* = (4.54,\ \ 2.15), \qquad S^* = (1,\ \ 1), \qquad D^* = (1,\ \ 1),$$
$$\lambda_{11} = -1.81, \qquad \lambda_{12} = -0.55, \qquad \lambda_{21} = 0.33, \qquad \lambda_{22} = -0.64$$
$$\tilde{\lambda}_{11} = 2, \qquad \tilde{\lambda}_{12} = -2, \qquad \tilde{\lambda}_{21} = 3, \qquad \tilde{\lambda}_{22} = -3,$$
$$\chi_{11} = -0.75, \qquad \chi_{12} = 4.73, \qquad \chi_{21} = 2.23, \qquad \chi_{22} = 0.85,$$
$$\tilde{\chi}_{11} = 2, \qquad \tilde{\chi}_{12} = \tilde{\chi}_{21} = 1, \qquad \tilde{\chi}_{22} = -3.$$

Тогда

$$P = \{p = (p_1, p_2)\colon 1 \le p_1 \le 5, 0.5 \le p_2 \le 8\}$$

и отображение S принимает вид:

$$S_1(p) = \exp(p_1^2 - 2p_2 + 1),$$
$$S_2(p) = \exp(3p_1 + p_2^{-3} - 4).$$

Рассмотрим уравнение $S(p) = s$ при $s = (\exp 7\,, \exp 10)$ в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \exp(p_1^2 - 2p_2 + 1) = \exp 7\,, \\ \exp(3p_1 + p_2^{-3} - 4) = \exp 10\,. \end{cases}$$

Данная система имеет два решения, принадлежащих P: (2.66, 0.55) и (4.67, 7.89) (получены численно методом Ньютона). Следовательно, отображение S не будет биективным.

Проверим выполнение условий теоремы 4. Для этого вычислим соответствующие параметры:

$$\bar{\alpha}(\sigma') = 0, \bar{\beta}(\sigma') = 3065.65, \gamma(\sigma') = 0.01.$$

Отсюда видно, что условия теоремы 4 не выполнены. Однако в модели σ' есть положение равновесия:

$$p^0 = (3.11,\ \ 5.77).$$

5. Заключение

Полученные в работе достаточные условия могут быть использованы для анализа реальной экономической ситуации путем использования статистики производства и продаж товаров на конкретных рынках. Помимо этого, результаты работы могут быть использованы для прогноза равновесных цен в будущем, что может поспособствовать улучшению экономической ситуации рассматриваемого региона, сокращению перепроизводства и безубыточной корректировке цен.

Литература

1. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. – London: William Strahan and Thomas Cadell. – 1776.
2. *Сэй Ж.-Б.* Трактат по политической экономии. – Париж: Guillaumin. – 1803.
3. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. – М.: Изограф. – 2000.
4. *Arrow K.J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. – 1954. – 22(3). – P. 265–290.
5. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53. – № 2. – С. 225–237.
6. *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г, Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28. – № 3. – С. 3–22.
7. *Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. – 2021. – V. 24. – № 4. – P. 130–144.
8. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in market models/ Proceedings of the 14th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD) // IEEE. – 2021. – P. 1–5.
9. *Котюков А.М., Павлова Н.Г.* Положение равновесия в моделях рынка с известной эластичностью / Материалы 16-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» // М: ИПУ РАН. – 2022. – С. 665–668.
10. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Stability and non-uniqueness of equilibrium in an open market model / Proceedings of the 15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD) // IEEE. – 2022. – P. 1–4.
11. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. – 2009. – V. 5. – № 1. – P. 5–16.
12. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 4. – С. 452–463.