DOI: 10.25728/mlsd.2023.1662

ДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УНИВЕРСИТЕТОВ И ГОСУДАРСТВА

Калачев В.Ю., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
vkalachev@sfedu.ru, gaugolnickiy@sfedu.ru, abusov@sfedu.ru

Аннотация. Построена двухуровневая динамическая дискретная теоретико-игровая модель управления внедрением инноваций в университетах. В качестве ведущего выступает государство, в роли ведомых – университеты. С точки зрения агентов строится равновесие Нэша, ведущего - равновесие в игре Гермейера Γ_{2t}. Исследованы разные виды субсидий. Сделан ряд выводов.

Ключевые слова: иерархические разностные игры, имитационное моделирование, олигополия Курно, управление университетами.

Введение

Основным условием успешного развития экономики и экономического роста в настоящее время является наличие эффективных механизмов ее инновационного развития, внедрения инновационных технологий**.** Формирование нового мышления у молодежи, осознание необходимости инновационной деятельности является одной из задач высшей школы, необходимой составляющей учебного процесса. Успешное решение этой задачи предполагает наличие большого числа специалистов, подготовленных для осуществления инновационных преобразований в экономике и социальной сфере. Внедрение инноваций предполагает значительные долговременные инвестиции. Поэтому принятие эффективных управленческих решений невозможно без математического моделирования процесса внедрения инноваций. Именно математическое моделирование сложных явлений и процессов позволяет учесть их специфику. Вопросам математического моделирования процесса внедрения инноваций посвящен ряд работ, среди которых выделим [1-3]. Ниже исследование процесса внедрения инноваций проводится в рамках авторского подхода [4-7], предполагающего использование теоретико-игрового и иерархического подходов и сравнение результатов, получаемых при независимом поведении игроков, их иерархической организации и кооперации. При этом для количественной оценки эффективности различных способов организации используются предложенные в [8] индивидуальные и коллективные индексы относительной эффективности.

1. Постановка задачи

Основным условием успешного развития экономики и экономического роста в настоящее время является наличие эффективных механизмов ее инновационного развития, внедрения инновационных технологий. Формирование нового мышления у молодежи, осознание необходимости инновационной деятельности является одной из задач высшей школы, необходимой составляющей учебного процесса. Успешное решение этой задачи предполагает наличие большого числа специалистов, подготовленных для осуществления инновационных преобразований в экономике и социальной сфере. Внедрение инноваций предполагает значительные долговременные инвестиции. Поэтому принятие эффективных управленческих решений невозможно без математического моделирования процесса внедрения инноваций. Именно математическое моделирование сложных явлений и процессов позволяет учесть их специфику. Вопросам математического моделирования процесса внедрения инноваций посвящен ряд работ, среди которых выделим [1-3]. Ниже исследование процесса внедрения инноваций проводится в рамках авторского подхода [4-7], предполагающего использование теоретико-игрового и иерархического подходов и сравнение результатов, получаемых при независимом поведении игроков, их иерархической организации и кооперации. При этом для количественной оценки эффективности различных способов организации используются предложенные в [8] индивидуальные и коллективные индексы относительной эффективности. несколько конкурирующих по Курно университетов, которые выступают в роли агентов. Они разрабатывают электронные учебные курсы для последующей продажи. Вложения в совершенствование этих курсов рассматриваются как инновационные инвестиции. В роли ведущего (Центра) выступает государство или его уполномоченные органы. В качестве метода иерархического управления в системе используется метод побуждения. Исследование проводится в рамках информационного регламента игры Гермейера Γ_{2t}.

Модель в случае n агентов записывается в виде:

- целевой функционал Центра

$$J_0 = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[\gamma \overline{x}(t) - \sum_{i=1}^{n} I\big(x_i(t)\big)\, s_i(x_i(t), t)\right] + \ \delta^T y(T) \to max. \quad (1)$$

- ограничения на управления Центра

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(x_i(t), t) \le S(t); s_i(x_i(t), t) \ge 0; i = 1,2, \dots, n; t = 1,2, . . , T. \quad (2)$$

- целевые функционалы агентов

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[\big(D - \propto \overline{x}(t)\big)x_i(t) - \frac{x_i^2(t)}{2\left(r_i + \beta \sum_{j \ne i} r_j I\big(x_j(t)\big)\right)} - c_i I\big(x_i(t)\big) + s_i I\big(x_i(t)\big)\right] \to max. \quad (3)$$

- ограничения на управления агентов

$$0 \le x_i(t) \le x_{max}; i = 1,2, \dots, n; t = 1,2, . . , T. \quad (4)$$

- уравнение динамики

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i - m y(t); \quad y(0) = y_0. \quad (5)$$

Здесь J_0, J_1 - выигрыши Центра и агентов соответственно; $s_i(x_i(t))$ субсидия Центра i-му агенту; $S(t)$ – годовой бюджет Центра; $x_i(t)$ - объём выпуска инновационного продукта i-м агентом; $\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$; r_i - тип агента (эффективность применяемых им технологий); $D, x_{max}, \gamma > 0$; $\alpha, \beta \ge 0$ - параметры модели; $\delta \in (0,1)$ - коэффициент дисконтирования; c_i - постоянные издержки агента; $I(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ - индикаторная функция; $y(t)$ - общий инновационный уровень системы образования; m - коэффициент снижения этого уровня при отсутствии инновационных продуктов; k_i - коэффициент влияния i-го продукта; y_0 - начальное значение инновационного уровня; T - период рассмотрения.

Модель (1) - (5) представляет собой разностную игру Гермейера с информационным регламентом, аналогичным игре Γ_{2t} для непрерывного случая [4].

Центр выбирает программные стратегии с обратной связью по управлению $s_i(x_i(t))$ и сообщает их агентам. Зная механизм управления Центра, агенты выбирают свои действия; $x_i(t)$ как равновесие Нэша в игре (3)-(4). Так как Центр может предвидеть оптимальную реакцию агентов, то он выбирает свои стратегии так, чтобы решить задачу (1) - (2), (5) на множестве равновесий Нэша в игре (3) - (4). При наличии нескольких равновесий Нэша в игре агентов используется принцип гарантированного результата Гермейера. ε-оптимальная гарантирующая стратегия Центра вместе с любым оптимальным ответом агентов образует равновесие в обратной игре Штакельберга (решение иерархической игры Гермейера Γ_{2t}).

Отметим, что агенты в рамках модели (1) - (5) являются близорукими, т.е. их целевой функционал можно переписать в виде

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t J_{it};\ J_{it} = \big(D - \propto \overline{x}(t)\big)x_i(t) - \frac{x_i^2(t)}{2\left(r_i + \beta \sum_{j \ne i} r_j I\big(x_j(t)\big)\right)} - c_i I\big(x_i(t)\big) + s_i I\big(x_i(t)\big) \to max.$$

и его оптимальное значение не зависит от переменной состояния, т.е от решения дифференциального уравнения (5). Поэтому от оптимизации функционала (3) для i-го агента можно перейти к оптимизации T функций вида

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t J_{it};\ J_{it} \to max;\ \ t = 1,2, \dots, T. \quad (6)$$

Оптимизация каждой функции (6) проводится по переменной $x_i(t)$ в фиксированный момент времени t с ограничениями (4). В результате каждый агент решает T задач оптимизации (6), (4).

Исследование модели (1), (2), (4)–(6) возможно с двух точек зрения. С точки зрения агентов возникает игра n лиц в нормальной форме, в которой строится равновесие Нэша. С точки зрения Центра разыгрывается иерархическая игра, в которой используется информационный регламент игры Гермейера Γ_{2t}.

2. Построение равновесия Нэша

Рассмотрим случай безразличного Центра, не преследующего собственных целей. В качестве управлений Центра возьмём линейные функции от действий агента, т.е. $s_i\big(x_i(t)\big) = \vartheta_i(t) x_i(t); i = 1,2, \dots, n$. Возникает неантагонистическая игра n лиц (4)-(6), в которой строится равновесие Нэша. Для

i-го агента максимальный выигрыш достигается при $x_i(t)=0$ и равен нулю или при $x_i(t)>0$. Найдем чему он будет равен в последнем случае. Используя необходимое условие экстремума функции одной переменной в случае симметричных агентов ($r_i(t)=r(t)$; $c_i(t)=c(t)$; $\vartheta_i(t)=\vartheta(t)$; $x_i(t)=x(t)$) получим уравнение для определения их стационарных управлений

$$\frac{\partial J_{it}}{\partial x(t)} = \mathrm{D} - 2\alpha\mathrm{n}\mathrm{x}(t) - \frac{x(t)}{r+\beta(n-1)r} = 0 \tag{7}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 J_{it}}{\partial x^2} = -2\alpha\mathrm{n} - \frac{1}{r+\beta(n-1)r} < 0$$

Следовательно, решение уравнения (7) определяет точку максимума и при $x(t)>0$ оптимальное управление агента задаётся формулой

$$x^0(t) = \frac{(D+\vartheta)(r+\beta(n-1)r)}{2\alpha n(r+\beta(n-1)r)+1}$$

В этом случае выигрыш агента есть

$$J_i = \sum_{i=1}^{T} \delta^t \frac{(D+\vartheta)(r+\beta(n-1)r)^2}{(2\alpha n(r+\beta(n-1)r)+1)^2}\left((D+\vartheta-c)\alpha n + \frac{D+\vartheta}{2(r+\beta(n-1)r)}\right) \equiv \sum_{i=1}^{T} \delta^t A(t)$$

Тогда оптимальные стратегии и выигрыши агентов определяются формулами

$$x^*(t) = \begin{cases} 0, & x^0(t) \le 0 \text{ или } A(t) < 0 \\ x^0(t), & \text{иначе} \end{cases}; \quad J_i^* = \sum_{t=1}^{T} J_{it}; \quad J_{it} = \max(0, \delta^t A(t)) \tag{8}$$

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Формулы (8) определяют точку максимума целевых функций (6) и выигрыши n симметричных агентов в равновесии Нэша в случае безразличного центра.

3. Случай кооперации агентов и центра

В случае кооперации n агентов и центра они сообща решают задачу оптимального управления с целевым функционалом вида

$$J^C = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[\vartheta\overline{x}(t) + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(D - \propto \overline{x}(t)\right)x_i(t) - \frac{x_i^2(t)}{2\left(r_i + \beta\sum_{j\ne i} r_j I\left(x_j(t)\right)\right)} - c_i I\left(x_i(t)\right)\right)\right] + \delta^T \mathrm{y}(\mathrm{T}) \to max. \tag{9}$$

Его максимум ищется по n функциям $\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ с ограничениями на управления (4) и уравнением динамики (5). Игра становится задачей оптимального управления.

Если управления всех агентов равны нулю, то выигрыш коалиции равен $\delta^T \mathrm{y}(0)e^{-mT}$.

Если наоборот, управления всех агентов не равны нулю, то при использовании агентами программных стратегий для нахождения максимума (9) применим дискретный принцип максимума Понтрягина [9,10]. Функция Гамильтона коалиции игроков имеет вид:

$$H_t = \delta^t \left[\vartheta\overline{x}(t) + \left(D - \propto \overline{x}(t)\right)\overline{x}(t) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2(t)}{2\left(r_i + \beta\sum_{j\ne i} r_j I\left(x_j(t)\right)\right)} - c_i\right)\right] + \mu(\mathrm{t})\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i - my(t)\right)$$

где $\mu(\mathrm{t})$ сопряжённая переменная. Из необходимого условия экстремума получим систему n уравнений

$$\frac{\partial H_t}{\partial x_i(t)} = \delta^t \left[\vartheta + D - 2\propto \overline{x}(t) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2x_i(t)}{2\left(r_i + \beta\sum_{j\ne i} r_j\right)} - c_i\right)\right] + \mu(\mathrm{t})k_i; \quad i = 1,2,\dots,n; \tag{10}$$

а для определения сопряжённой переменной - задачу Коши

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -m\mu;\;\; \mu(\mathrm{T}) = 1$$

Следовательно, $\mu(t) = e^{-m(T-t)}$.

Система уравнений (10) в общем случае решается численно. В случае n=2, система принимает вид

$$\frac{\partial H_t}{\partial x_1} = \delta^t \left[\vartheta + D - 2 \propto (x_1 + x_2) - \frac{x_1(t)}{(r_1 + \beta r_2)} \right] + \mu(\mathrm{t}) k_1 = 0;$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial x_2} = \delta^t \left[\vartheta + D - 2 \propto (x_1 + x_2) - \frac{x_2(t)}{(r_2 + \beta r_1)} \right] + \mu(\mathrm{t}) k_2 = 0;$$

Решая ее, получим

$$x_1^0(t) = \frac{A - B}{2\propto + 1 + 1/(2\propto (r_1 + \beta r_2))};\; x_2^0(t) = \frac{\vartheta + D}{2\propto} + \frac{k_1 e^{-m(T-t)}}{2\propto \delta^t} - \frac{x_1}{2\propto (r_1 + \beta r_2)} - \; x_1^0(t)$$

где

$$A = \vartheta + D + \frac{k_2 e^{-m(T-t)}}{\delta^t};\;\;\; B = \left(2 \propto \frac{1}{(r_2 + \beta r_1)} \right) \left(\frac{\vartheta + D}{2 \propto} + \frac{k_1 e^{-m(T-t)}}{2 \propto \delta^t} \right)$$

Найденная пара точек $\left(x_1^0(t), x_2^0(t) \right)$ является точкой максимума функции Гамильтона при положительных управлениях. Действительно

$$\frac{\partial^2 H_t}{\partial x_1^2} = -\delta^t \left[2 \propto - \frac{1}{(r_1 + \beta r_2)} \right] \equiv E < 0;\; \frac{\partial^2 H_t}{\partial x_2^2} = -\delta^t \left[2 \propto - \frac{1}{(r_2 + \beta r_1)} \right] \equiv F < 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_t}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 \propto \delta^t \equiv G < 0;\;\;\; \Delta = EF - G^2 > 0;\;\; E < 0$$

Следовательно, максимум функции Гамильтона с учетом ограничений на управления (4) достигается в одной точек

$$(x_1^0, x_2^0);\; (x_1^0, 0);\; (0, x_2^0); (0{,}0);\; (x_{max}, x_2^0);\; (x_1^0, x_{max}); (x_{max}, x_{max} x); \tag{11}$$

и доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Формулы (11) определяют точку максимума функции Гамильтона в случае кооперации двух агентов.

3. Построение решения игры Гермейера Γ_{2t}

При рассмотрении модели с точки зрения Центра разыгрывается игра Гермейера Γ_{2t}. Алгоритм построения решения этой игры состоит в следующем [6,7,11,12].

Находится стратегия наказания Центром агентов, когда последние отказываются сотрудничать с ним

$$\left\{ x_{it}^P \{s_{it}\}_{t=1}^T \right\} = \arg \max_{0 \le x_{it} \le x_{max}} J_i(\{s_{it}\}_{t=1}^T, \{x_{it}\}_{t=1}^T);$$

$$\left\{ s_{it}^P \right\}_{t=1}^T = \arg \min_{\sum_{i=1}^n s_i(x_i(t), t) \le S(t); s_i(x_i(t), t) \ge 0} J_i \left(\{s_{it}\}_{t=1}^T, \left\{ x_{it}^P \right\}_{t=1}^T \right);$$

Гарантированный выигрыш агента, если он отказывается сотрудничать с Центром, есть

$$L_i = J_i \left(\left\{ s_{it}^P \right\}_{t=1}^T, \left\{ x_{it}^P \right\}_{t=1}^T \right) = \max_{0 \le x_{it} \le x_{max}} \min_{\sum_{i=1}^n s_i(x_i(t), t) \le S(t); s_i(x_i(t), t) \ge 0} J_i(\{s_{it}\}_{t=1}^T, \{x_{it}\}_{t=1}^T);$$

и определяется формулой, аналогичной (8) при $s_{it} = 0$.

1. Решается задача оптимального управления (1), (2),(4),(5) с условиями

$$L_i < J_i(\{s_{it}\}_{t=1}^T, \{x_{it}\}_{t=1}^T)\;;\;\; i = 1{,}2, \dots, n \tag{12}$$

Максимум ищется по двум сеточным функциям $\{s_{it}\}_{i,t=1}^{n(T)}, \{x_{it}\}_{i,t=1}^{n(T)}$ Решение указанной задачи оптимального управления обозначим $\{s_{it}^R\}_{t=1}^T, \{x_{it}^R\}_{t=1}^T$ где $\{s_{it}^R\}_{t=1}^T$- стратегия поощрения i-го агента при выборе им $\{x_{it}^R\}_{t=1}^T$

2. Центр предъявляет каждому агенту стратегию с обратной связью по его управлению:

$$s_{it} = \begin{cases} s_{it}^R, & \text{если } x_{it} = x_{it}^R \\ s_{it}^P & \text{иначе} \end{cases} ; \; i = 1,2,\dots,n; t = 1,2,\dots,T$$

Выполнение условия (12) при максимизации функционала Центра делает для агентов стратегию поощрения выгоднее стратегии наказания. При экономически разумных агентах решение имеет вид $\{s_{it}^R\}_{t=1}^T, \{x_{it}^R\}_{t=1}^T$

Решение игры Гермейера Γ_{2t} строится численно методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования (метод КРС ИМ) [13].

Метод КРС ИМ основан на идее о том, что для оценки последствий управления достаточно рассмотреть небольшое число сценариев, отражающих характерные качественно различные варианты воздействия на систему. В [13] дано определение множества качественно репрезентативных сценариев в иерархической игре.

Пусть $\Omega = S_1 \times \ldots \times S_N \times X_1 \times \ldots \times X_N$. Здесь $S_i = (s_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^n s_i \leq S);\ X_i = (x_i \geq 0\,), i = 1,2, \ldots, N$ – множества допустимых управлений агентов и Центра.

Определение. Множество

$$QRS = S^{QRS} \times X^{QRS} = S_1^{QRS} \times S_2^{QRS} \times \ldots \times S_N^{QRS} \times X_1^{QRS} \times X_2^{QRS} \times \ldots \times X_N^{QRS} =$$

$$\left\{(s,x) = (s_1, \ldots, s_N; x_1, \ldots, x_N); s_i \in S_i^{QRS} \subset S_i; x_i \in X_i^{QRS} \subset X_i\right\}$$

называется множеством QRS иерархической игры с точностью Δ, если:

(a) для любых двух элементов $(s,x)^{(i)}, (s,x)^{(j)} \in QRS$ $|J_0^{(i)} - J_0^{(j)}| > \Delta$;

(b) для любого элемента $(s,x)^{(l)} \notin QRS$ найдется элемент $(s,x)^{(j)} \in QRS$ такой, что

$$|J_0^{(l)} - J_0^{(j)}| \leq \Delta.$$

Алгоритм построения решения игры Гермейера Γ_{2t} методом КРС ИМ.

1. Начальное множество $QRS^{(k)}$ имеет вид (k=0)

$$QRS^{(k)} = (S^{QRS})^{(k)} \times (X^{QRS})^{(k)};$$

$$(S^{QRS})^{(k)} = ((S_1^{QRS})^{(k)} \times (S_2^{QRS})^{(k)} \times \ldots (S_N^{QRS})^{(k)});$$

$$(X^{QRS})^{(k)} = ((X_1^{QRS})^{(k)} \times (X_2^{QRS})^{(k)} \times \ldots \times (X_N^{QRS})^{(k)})$$

$$(S_i^{QRS})^{(k)} \equiv \left\{s_1^{(k)}; s_2^{(k)}; s_3^{(k)}\right\}; (X_i^{QRS})^{(k)} \equiv \left\{x_1^{(k)}; x_2^{(k)}; x_3^{(k)}\right\};$$

$$s_1^{(k)} = 0; s_2^{(k)} = s_{\max}/2; s_3^{(k)} = s_{\max};\ x_1^{(k)} = 0; x_2^{(k)} = x_{\max}/2; x_3^{(k)} = x_{\max};$$

где величины $s_{\max}, x_{max}$ достаточно велики и определяются для каждой системы управления индивидуально.

2. Во множестве $QRS^{(k)}$ получается 3^{2N}элементов и все они проверяются на выполнение обоих требований в определении множества QRS. В результате при необходимости начальное множество $QRS^{(k)}$ сужается или пополняется новыми элементами.
3. Находится стратегия наказания агента, если он отказывается сотрудничать с Центром. Для этого путем перебора стратегий из $(X^{QRS})^{(k)}$находятся равновесия Нэша при фиксированном управлении Центра $NE^{QRS}((S^{QRS})^{(k)})$. Затем находится гарантированный выигрыш i-го агента при отказе от сотрудничества с Центром;

$$L_i^P = \max_{x_i \in NE^{QRS}((S^{QRS})^{(k)})} \min_{s_i \in (S^{QRS})^{(k)}} J_i(s_i, x_i).$$

4. Путем полного перебора качественно репрезентативных стратегий Центра из $(S^{QRS})^{(k)}$ и агентов из $(X^{QRS})^{(k)}$ находится максимум (1), (2), (4) при выполненных условиях $J_i > L_i^P (i = 1,2, \ldots, N)$.

Величины, его доставляющие, и образуют k-е приближение к решению игры Гермейера $Г_{2t}$. Обозначим их $\left(s^{R\,(k)}, x^{R\,(k)}\right)$.

5. Изменяются множества QRS Центра и агентов (k=k+1) – они измельчаются в окрестности построенного равновесия следующим образом.

Если $(s_i^*)^{(k-1)} = s_1^{(k-1)}$, то $s_1^{(k)} = s_1^{(k-1)}; s_2^{(k)} = (s_1^{(k-1)} + s_2^{(k-1)})/2; s_3^{(k)} = s_2^{(k-1)}$.

Если $(s_i^*)^{(k-1)} = s_2^{(k-1)}$, то $s_1^{(k)} = \frac{s_1^{(k-1)}+s_2^{(k-1)}}{2}; s_2^{(k)} = s_2^{(k-1)}; s_3^{(k)} = (s_2^{(k-1)} + s_3^{(k-1)})/2$ Если $(s_i^*)^{(k-1)} = s_3^{(k-1)}$, то $s_1^{(k)} = s_2^{(k-1)}; s_2^{(k)} = (s_2^{(k-1)} + s_3^{(k-1)})/2; s_3^{(k)} = s_3^{(k-1)}$.

Для агентов новые множества $QRS^{(k)}$ строятся аналогично.

Если на некоторой итерации окажется, что $(s_i^R)^{(k)} = (s_i^R)^{(k-1)}; (x_i^R)^{(k)} = (x_i^R)^{(k-1)}; i = 1,2,\dots,N,$ то решение игры Гермейера $Г_{2t}$ методом КРС ИМ построено. В противном случае переход на пункт 2 алгоритма.

За конечное число итераций решение игры Гермейера $Г_{2t}$ методом КРС ИМ будет построено.

4. Результаты имитационных экспериментов

При рассмотрении модели с точки зрения Центра разыгрывается игра Гермейера $Г_{2t}$.

Были рассмотрены следующие виды стратегий Центра:

а) равномерные субсидии для всех агентов в фиксированный момент времени. Если объём выпуска инновационного продукта у всех агентов больше нуля, то $\forall i\ s_i(t) \equiv s > 0$, в противном случае $\forall i\ s_i(t) \equiv 0$;

б) субсидии, зависящие от типа агентов (их эффективности) $s_i(t) = s_i\big(r_i(t)\big)$; взята линейная зависимость $s_i\big(r_i(t)\big) = \alpha_i r_i$константы α_i подлежат определению.

в) субсидии, зависящие от действий агента) $s_i(t) = s_i\big(x_i(t)\big)$; ; также взята линейная зависимость $s_i\big(x_i(t)\big) = \beta_i r_i$, константы β_i подлежат определению.

Все имитационные эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 3550Hc оперативной памятью 8 Гб на объектно-ориентированном языке программирования С++. Среднее время одного имитационного эксперимента с построением множества QRS составило менее секунды.

Анализ полученных результатов проводился на основе следующих показателей:

а) суммарного дисконтированного выигрыша Центра, что отвечает принципу Ю.Б. Гермейера анализа системы управления с позиции ведущего игрока;

б) значений индивидуальных и коллективных индексов относительной эффективности [8] .

Коллективные индексы относительной эффективности показывают, насколько необходимо присутствие Центра в системе управления, и можно ли отказаться от иерархической структуры системы. Чем они ближе к единице, тем система лучше согласована, и необходимость в наличии Центра меньше.

При проведении имитационных экспериментов варьировались величины:

1. ϑ от 0.01 до 3;
2. D от 5 до 100;
3. A от 0.001 до 0.1 год/млн.руб.;
4. $r_{1,2}$ от 0.5 до 50 тыс.руб./год;
5. $c_{1,2}$ от 50 до 1000 млн.руб./год;
6. β от 0.01 до 0.6;
7. m от 0.0001 до 0.11/год;
8. $k_{1,2}$ от 0.001 до 0.051/год;
9. y_0 от 30 до 500 млн.руб./год;
10. S от 100 до 500 млн. руб./год.

При проведении численных экспериментов учитывалось, что внедрение инноваций приносит Центру дополнительный выигрыш только в перспективе и в данный момент может быть для него экономически невыгодно. Наоборот. Центр делает для агентов выгодным внедрение инноваций в данный момент. Поэтому в большинстве рассмотренных примеров выигрыш Центра существенно меньше выигрыша агентов. Результаты численного счёта при построении решения игры Гермейера $Г_{2t}$ для различных сценариев управления Центра в случае входных данных из табл. 1 и T=6; n=2 приведены в табл. 2. Здесь верхний индекс у величин $J_0^{(k)}, J_1^{(k)}, J_2^{(k)}$ означает определённый сценарий управления Центра, а именно, а) – случай равномерных субсидий; б) - зависимость от типа агентов (их эффективности); в) - зависимость от действий агента; J^C означает выигрыш коалиции агентов и Центра при кооперативном подходе.

Таблица 1. Входные данные для численного решения

№		$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{c_1}$	$\boldsymbol{c_2}$	$\boldsymbol{y_0}$	$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{\upsilon}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{m}$
1		200	20	30	500	700	200	0.02	0.4	1	0.2	1.0	0.03
2		200	60	50	300	400	200	0.03	0.3	1	0.1	0.8	0.03
3		200	20	70	350	200	100	0.04	0.06	0.5	0.3	0.1	0.03
4		200	60	20	200	400	100	0.04	0.03	0.5	0.25	0.5	0.03
5		200	30	10	600	500	200	0.01	0.05	1	0.05	0.3	0.05
6		200	20	50	400	300	200	0.05	0.02	0.5	0.1	1.4	0.05
7		300	40	60	200	500	200	0.12	0.2	1	0.12	0.8	0.05
8		300	20	10	400	300	200	0.1	0.1	1.5	0.15	0.6	0.1
9		300	40	20	500	600	50	0.01	0.03	0.4	0.05	0.7	0.02
10		300	20	10	200	500	50	0.07	0.01	0.1	0.1	1	0.02
11		300	50	30	400	300	50	0.05	0.01	0.3	0.1	0.8	0.01
12		500	20	10	400	300	200	0.03	0.25	0.4	0.2	1	0.03
13		500	10	50	400	200	200	0.07	0.03	0.3	0.2	0.8	0.03
14		500	40	25	200	500	200	0.01	0.03	0.2	0.1	1.2	0.03
15		500	30	50	400	300	200	0.05	0.3	0.1	0.5	1.5	0.03
16		500	20	40	100	500	200	0.2	0.1	0.3	0.3	1	0.03
17		500	15	10	150	100	200	0.1	0.5	0.1	0.4	0.5	0.02
18		200	20	30	450	350	100	0.06	0.04	0.1	0.2	2	0.01
19		200	60	25	500	450	100	0.01	0.03	0.4	0.15	1	0.01
20		200	10	40	400	300	100	0.03	0.02	0.3	0.2	1	0.01
21		200	30	40	500	700	100	0.01	0.05	0.5	0.05	2	0.01
22		200	40	50	600	300	100	0.02	0.04	0.3	0.1	2	0.01
23		200	15	20	400	600	200	0.01	0.08	0.7	0.2	1	0.02
24		100	50	40	300	400	200	0.05	0.01	0.8	0.2	2	0.02
25		100	50	15	500	600	200	0.01	0.06	0.5	0.1	2	0.01
26		100	30	5	500	300	200	0.05	0.08	0.5	0.1	1	0.02
27		100	5	20	400	500	200	0.03	0.06	0.5	0.2	1	0.02
28		100	10	5	300	400	200	0.02	0.05	0.5	0.1	2	0.01
29		100	20	10	400	700	100	0.07	0.05	1	0.3	1	0.01
30		100	30	10	600	500	100	0.05	0.02	0.5	0.1	1.5	0.02
31		100	10	20	500	700	100	0.05	0.01	1.5	0.05	1.2	0.01
32		100	20	30	500	400	100	0.01	0.02	1.0	0.2	1.0	0.01
33		50	20	25	500	400	50	0.01	0.02	0.9	0.23	1.4	0.01
34		50	30	5	500	600	50	0.03	0.05	1.4	0.25	1.7	0.01
35		50	5	10	700	400	100	0.02	0.04	1.7	0.15	1.5	0.01
36		50	5	20	400	600	50	0.05	0.03	1.2	0.2	1.2	0.02
37		50	10	5	500	400	100	0.01	0.02	1.5	0.15	1.0	0.02
38		50	20	15	500	600	100	0.05	0.01	1.5	0.15	0.5	0.01
39		50	15	10	500	400	50	0.03	0.05	1.0	0.1	1.0	0.02
40		50	10	15	700	500	50	0.01	0.03	1.2	0.15	0.7	0.02

Для сравнительного анализа эффективности использования различных сценариев управления Центра, следуя [4], используется система индивидуальных и коллективных индексов относительной эффективности. Коллективные индексы относительной эффективности соотносят значения общественного благосостояния при различных сценариях управления Центра с максимальным суммарным выигрышем всех субъектов, достигаемым при кооперации игроков: $SCI = \frac{\sum_{i=0}^{n} J_i}{J^C}$. Здесь J_i есть выигрыш соответствующего субъекта при выбранном сценарии (а,б,в) управления Центра, а J^C– выигрыш коалиции всех субъектов при кооперации.

Индивидуальные индексы относительной эффективности соотносят выигрыши отдельных игроков при различных сценариях (а,б,в) управления Центра с их симметричным выигрышем при кооперации:

$$K_i = \frac{(n+1)J_i}{J^C};\, i = 1,2,\dots,n.$$

Таблица 2. Результаты численного исследования

№	$J^{(C)}$	$J_0^{(а)}$	$J_1^{(а)}$	$J_2^{(а)}$	$J_0^{(б)}$	$J_1^{(б)}$	$J_2^{(б)}$	$J_0^{(в)}$	$J_1^{(в)}$	$J_2^{(в)}$
1	58756	1018	25434	24834	1260	25445	25065	1450	25475	25225
2	60027	868	27572	27371	1380	28042	27311	1300	27612	27662
3	53185	335	24320	24857	897	24331	25408	767	24361	25248
4	54733	285	25605	24984	767	26076	24995	717	25646	23375
5	62544	378	27345	27561	610	27576	27562	810	27386	27952
6	59429	238	27267	27540	640	27278	27961	670	27307	27961
7	89206	638	42566	41662	1140	45525	42139	1070	42557	42059
8	88442	568	41477	41748	880	41788	41748	1000	41518	42139
9	92185	938	42689	42381	560	43000	42391	670	42730	42771
10	89611	248	42784	41884	400	42935	41885	680	42825	42275
11	89601	408	42258	42255	620	42649	42576	840	42300	42946
12	146967	605	70684	70984	667	70735	71735	1036	70735	71735
13	146306	275	70734	71344	667	70721	71708	707	70702	71631
14	149337	145	72855	71957	472	73166	71972	577	72896	72348
15	137793	631	66273	66569	1043	66294	66960	1063	66314	66560
16	143530	608	70146	68946	930	70157	69257	1040	70188	69337
17	140696	1547	68371	68494	1660	68482	68496	1980	68412	68885
18	57034	548	25612	25906	790	25623	26136	980	25653	26296
19	56674	338	26214	26364	825	26685	26381	770	26255	26755
20	56674	358	25734	26034	670	25735	26345	790	25775	26425
21	62622	468	27724	27121	800	27746	27432	900	27765	27512
22	60146	408	26682	27580	830	26713	27971	840	26723	27971
23	57653	453	25701	25101	610	25707	25252	885	25742	25492
24	26546	408	11080	10782	830	11471	10813	840	11121	11173
25	30908	518	11962	11676	915	12353	11682	950	12003	12067
26	30312	493	11902	12502	720	12133	12498	925	11943	12893
27	27544	393	10659	10359	540	10655	10510	825	10700	10750
28	29975	518	12421	12159	585	12493	12155	950	12462	12550
29	25481	918	9184	8284	1070	9335	8285	1350	9225	8675
30	31258	643	11601	11859	875	11832	11860	1074	11643	12250
31	32984	678	12665	12051	830	11267	11202	1109	12704	12442
32	27306	468	10434	10734	710	10445	10965	900	10475	11125
33	8360	438	2491	2788	640	2501	2979	870	2532	3179
34	7944	838	2162	1886	1067	2163	2091	1270	2203	2283
35	10060	828	2972	3845	895	2968	3916	1260	3013	4236
36	9986	578	3180	2564	725	3176	2716	1009	3221	2956
37	10288	543	3509	3809	610	3580	3805	975	3550	4200
38	11842	768	3622	3309	760	3066	4011	1200	3663	3700
39	11512	518	4359	4659	630	4470	4660	950	4400	5050
40	9694	328	3025	3620	440	3026	3611	760	3066	4011

Выигрыши всюду предполагаются неотрицательными. Значения индексов относительной эффективности приведены в табл.3.

В последней строке табл. 3 приведены средние значения индексов.

Отсюда получаем системы предпочтений:

общество: $С \gg В \gg Б \gg А$;

ведомые игроки: $Б \sim В \gg А \gg С$;

ведущий игрок: $С \gg В \gg Б \gg А$.

Таким образом, для общества в целом и ведущего игрока предпочтительнее кооперативный подход, а для ведомых игроков – субсидии со стороны Центра, зависящие от типа агентов (их эффективности) или от действий агентов.

Кроме того, анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы

С увеличением параметра ϑ, характеризующего выигрыш Центра в зависимости от суммарного объема выпуска инновационного продукта агентами, его выигрыш растет, причем линейно для всех рассмотренных случаев субсидий агентов Центром. Выигрыши агентов при этом не меняются.

Таблица 3. Индексы эффективности игроков

№	А		Б		В	
	SCI	**$K_0/K_1/K_2$**	**SCI**	**$K_0/K_1/K_2$**	**SCI**	**$K_0/K_1/K_2$**
1	0.87	0.05/1.3/1.27	0.88	0.06/1.29/1.28	0.88	0.07/1.3/1.29
2	0.93	0.04/1.38/1.87	0.95	0.07/1.39/1.36	0.94	0.06/1.38/1.39
3	0.99	0.02/1.31/1.4	0.95	0.05/1.37/1.43	0.95	0.04/1.37/1.42
4	0.93	0.02/1.4/1.4	0.95	0.04/1.43/1.37	0.91	0.04/1.41/1.28
5	0.88	0.02/1.31/1.32	0.89	0.03/1.32/1.32	0.9	0.04/1.31/1.34
6	0.93	0.01/1.38/1.39	0.94	0.03/1.38/1.41	0.94	0.03/1.38/1.41
7	0.95	0.02/1.43/1.40	0.99	0.04/1.53/1.42	0.96	0.04/1.43/1.41
8	0.95	0.02/1.41/1.42	0.95	0.03/1.42/1.41	0.96	0.03/1.41/1.43
9	0.97	0.03/1.39/1.38	0.93	0.02/1.4/1.38	0.93	0.02/1.39/1.39
10	0.95	0.01/1.43/1.4	0.95	0.01/1.44/1.4	0.96	0.02/1.43/1.42
11	0.95	0.01/1.42/1.41	0.96	0.02/1.43/1/43	0.96	0.03/1.42/1.44
12	0.97	0.01/1.44/1.45	0.97	0.01/1.44/1.46	0.98	0.02/1.44/1.46
13	0.97	0.01/1.45/1.44	0.97	0.01/1.44/1.46	0.97	0.01/1.44/1.46
14	0.97	0.01/1.46/1.45	0.92	0.01/1.47/1.45	0.98	0.01/1.46/1.45
15	0.97	0.01/1.44/1.45	0.97	0.02/1.48/1.46	0.97	0.02/1.44/1.45
16	0.97	0.01/1.47/1.44	0.98	0.02/1.47/1.45	0.98	0.02/1.47/1.45
17	0.98	0.03/1.46/1.47	0.98	0.04/1.46/1.47	0.99	0.04/1.46/1.48
18	0.91	0.03/1.35/1.36	0.92	0.04/1.35/1.37	0.93	0.02/1.35/1.38
19	0.93	0.02/1.38/1.39	0.95	0.04/1.41/1.4	0.95	0.04/1.39/1.42
20	0.92	0.02/1.36/1.38	0.93	0.04/1.36/1.39	0.93	0.04/1.36.1.4
21	0.88	0.02/1.33/1.31	0.89	0.04/1.33/1.38	0.9	0.04/1.33/1.32
22	0.91	0.02/1.33/1.35	0.92	0.04/1.33/1.4	0.92	0.04/1.33/1.4
23	0.89	0.02/1.34/1.31	0.89	0.03/1.34/1.31	0.89	0.05/1.34/1.32
24	0.84	0.05/1.25/1.22	0.87	0.09/1.3/1.22	0.87	0.09/1.26/1.26
25	0.78	0.05/1.16/1.13	0.82	0.09/1.2/1.13	0.81	0.09/1.17/1.17
26	0.82	0.05/1.18/1.21	0.83	0.07/1.2/1.24	0.85	0.09/1.18/1.28
27	0.78	0.04/1.16/1.13	0.79	0.06/1.16/1.14	0.81	0.09/1.16/1.17
28	0.84	0.05/1.24/1.21	0.84	0.06/1.25/1.22	0.87	1.1/1.25/1.26
29	0.72	0.11/1.08/0.99	0.74	0.13/1.1/0.98	0.76	0.16/1.09/1.02
30	0.77	0.06/1.11/1.09	0.79	0.08/1.14/1.14	0.8	0.1/1.11/1.18
31	0.77	0.06/1.15/1.11	0.71	0.08/1.02/1.02	0.8	0.1/1.16/1.13
32	0.79	0.05/1.15/1.19	0.81	0.08/1.15/1.2	0.82	0.1/1.15/1.22
33	0.68	0.16/0.89/1.0	0.73	0.23/0.9/1.07	0.79	0.31/0.92/1.14
34	0.63	0.32/0.82/0.71	0.67	0.4/0.82/0.79	0.72	0.48/0.83/0.86
35	0.75	0.25/0.89/1.15	0.77	0.27/0.89/1.17	0.85	0.38/0.9/1.28
36	0.63	0.17/0.96/0.77	0.66	0.22/0.95/0.82	0.72	0.3/0.97/0.9
37	0.76	0.16/1.02/1.11	0.74	0.18/1.04/1.11	0.85	0.2/1.04/1.22
38	0.65	0.19/0.92/0.84	0.66	0.19/0.78/1.02	0.72	0.3/0.93/0.94
39	0.83	0.13/1.14/1.21	0.85	0.16/1.16/1.21	0.9	0.25/1.15/1.32
40	0.72	0.1/0.94/1.12	0.73	0.14/0.94/1.12	0.81	0.24/0.95/1.24
Ср	**0.86**	**0.06/1.25/1.24**	**0.87**	**0.07/1.27/1.26**	**0.89**	**0.1/1.26/1.30**

1. С увеличением параметров функции спроса D и α выигрыши агентов растут, причем экспоненциально. Выигрыш Центра при изменении этих параметров не меняется.
2. При изменении типа агента – возрастании или убывании эффективности применяемых им технологий, выигрыш агента меняется незначительно. При возрастании эффективности в 2 раза, выигрыш увеличивается всего процентов на 10. Выигрыш Центра при этом не меняется
3. При увеличении постоянных издержек агентов их выигрыш ожидаемо падает.
4. При изменении параметров уравнения динамики системы – коэффициентов снижения уровня инновационного развития с течением времени и влияние разных агентов на изменение этого уровня выигрыш агентов не меняется. А Центра с увеличением коэффициента снижения уровня падает, а с увеличением коэффициента влияния агентов резко растет. Также он растет с ростом начального значения инновационного уровня

5. Заключение

Исследована двухуровневая система управления инновациями в конкурирующих между собой университетах. Для описания такой системы управления предложена иерархическая (Центр - университеты) разностная дифференциальная модель. На основе принципа максимума Понтрягина для частного вида входных функций в случае бескорыстного Центра аналитически построено равновесие Нэша в неантагонистической игре агентов в нормальной форме. Указан алгоритм построения равновесия в игре Гермейера Γ_{2t} в игре Центра с коалицией агентов и проведена его численная реализация на основе метода качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования. Анализ полученных результатов позволил сделать ряд сформулированных выше выводов. Главный вывод состоит в том, что для общества в целом и ведущего игрока предпочтительнее кооперативный подход, а для ведомых игроков – субсидии со стороны Центра, зависящие от типа агентов (их эффективности) или от действий агентов.

Для успешного внедрения инновационных продуктов в ВУЗах необходимо наличие Центра, учитывающего стратегические цели развития системы. Сами ВУЗы часто являются близорукими, что и было учтено в модели. Центр же за счет субсидий делает для агентов выгодным внедрение инновационных продуктов в данный момент. Выигрыш самого Центра в данный момент при этом может быть незначительным.

Далее предполагается исследование построенной модели в кооперативной постановке с играми в виде характеристической функции Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна и их сравнительный анализ.

Литература

1. *Hakkarainen K.* The innovation funnel fallacy // International Journal of Innovation Science. – 2014. V. 6(2). P. 63-71.
2. *Bonazzi F., Zilber M.* Innovation and business model: a case study about integration of innovation funnel and business model canvas // Review of business management. 2014. - N 53. – P. 616-637.
3. *Макаров В.Л.* Обзор математических моделей экономики с инновациями // Экономика и математические методы, 2009, Т. 45, № 1, - С. 3 – 14.
4. *Malsagov M.Kh., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* A Differential Stackelberg Game Theoretic Model of the Promotion of Innovations in Universities // Advances in Systems Science and Applications, 2020, 20(3), - P.166-177.
5. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Динамические модели согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций // Математическая теория игр и её приложения, 2019. №11(1) - С. 96-114
6. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учётом требований устойчивого развития // АиТ. 2014. №6. - С.86-102.
7. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // АиТ. 2016. №5. - С. 148-158
8. *Ougolnitsky G.A.* An Approach to Compare Organization Modes of Active Agents and Control Methods // Control Sciences. 2022. - Vol. 3. - P. 24–33.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов - М.: Наука, - 1976. 393 с.
10. *Интрилигатор М*. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М: Айрис-Пресс, 2002. – 600 с.
11. *Basar T., Olsder G.J.* Dynamic Non-Cooperative Game Theory. - SIAM, 1999. - 515 p.
12. *Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. - Cambridge University Press, 2000. -382 p.
13. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. P.63-106.