

ДИНАМИЧЕСКИЕ СЕТЕВЫЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО¹

Горбанева О.И., Михалкович С.С., Мурзин А.Д., Угольницкий Г.А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
gorbaneva@mail.ru, admurzin@sfnu.ru, ougoln@sfnu.ru

Аннотация. В статье рассмотрена сетевая версия динамической кооперативной игры. Рассматривается теоретико-игровая дифференциальная модель олигополии Курно в нормальной форме. Проводится сравнительный анализ ожидаемых выигрышей участников, найденных аналитически и численно. Также строится модель олигополии Курно в виде характеристической функции.

Ключевые слова: олигополия Курно, равновесие по Штакельбергу, равновесие по Нэшу, кооперация агентов.

Введение

В статье проводится исследование динамической постановки сетевой теоретико-игровой модели олигополии Курно. Рассматриваются три различные структуры системы: 1) система, в которой все агенты являются независимыми; 2) система, в которой все агенты кооперируются и образуют коалицию; 3) система, в которой самый сильный агент является лидером. В системе независимых агентов находится равновесие по Нэшу. В коалиционной постановке ищется Парето-оптимальное равновесие. При этом находится выигрыш всей коалиции, который равномерно распределяется между участниками системы. В иерархической постановке ищется равновесие по Штакельбергу. То есть сначала при фиксированной стратегии первого агента находится равновесие по Нэшу среди всех других участников, после чего, учитывая найденную реакцию всех остальных агентов на стратегию первого агента, ищется та, при которой выигрыш первого агента максимален.

Модель учитывает «зеленый» эффект при производстве. То есть, учитываются «экологические» расходы агентов по поддержанию «зеленого» производства. Считается, что при производстве выделяются в окружающую среду загрязняющие вещества, которые агенты могут очищать за свой счет. «Экологические» расходы зависят от количества произведенной продукции и от количества загрязняющих веществ, сброшенных всеми предприятиями в окружающую среду. В статье рассматриваются два вида расходов: линейные и квадратичные.

Проведена сравнительная характеристика результатов исследования. Сравняются выигрыши участников при различных структурах системы участников. Сравнение проводится отдельно для случая, когда функция «экологических» затрат линейна, и когда она квадратичная.

Для исследования модели применяются аналитические и имитационные методы. Для исследования модели олигополии Курно, линейной относительно «экологических» расходов, применяется метод Гамильтона-Беллмана, а модель, квадратичной относительно «экологических» расходов, исследуется имитационно.

Далее структура статьи следующая. В разделе 1 приведен обзор предшествующих работ теме исследования. В разделе 2 описана динамическая модель олигополии Курно в трех теоретико-игровых постановках: игры в нормальной форме, игры в виде характеристической функции, иерархической игры. В разделе 3 приведены результаты аналитического исследования модели с линейной функцией «экологических» затрат, а также приведена сравнительная характеристика результатов исследования различных структур системы агентов. В разделе 4 приведено заключение статьи.

1. Обзор литературы

Очень интересное направление исследований последних лет в данной области - "зелёные" цепи поставок (green supply chain) [1]. Здесь речь идёт об усилиях, которые участники цепи поставок предпринимают для снижения негативного воздействия производства и логистики на окружающую среду. Предполагается, что такая деятельность приведёт к увеличению спроса на "зелёную" продукцию со стороны экологически ответственных потребителей. Отметим, что участники цепей поставок могут тратить дополнительные ресурсы на увеличение не только экологичности, но и, например, инновационности или социальной полезности производимой продукции, что также ведёт к повышению спроса на неё.

¹ Работа поддержана грантом РФФИ № 23-21-00131

Sharma and Jain в [2] исследуют теоретико-игровые модели цепей поставок с учётом "зелёного" эффекта, заботы о справедливости и контрактов разделения затрат. Они изучают две возможные постановки иерархической игры, когда заботящимся о справедливости ведущим является производитель либо продавец. В обоих случаях учитывается "зелёный" эффект.

Удобной моделью для указанного сравнительного анализа представляется олигополия Курно [3], описывающая конкуренцию производителей по объёмам выпуска однородного товара.

Горбанева и Угольницкий в [4] исследуют статические теоретико-игровые модели олигополии Курно с учётом "зелёного" эффекта и заботы о справедливости, проводят сравнительный анализ эффективности различных способов организации экономических агентов (независимое поведение, иерархия, кооперация) с учётом дополнительных особенностей структуры и регламента взаимодействия агентов. В качестве таких особенностей рассматриваются цепи поставок, "зелёный" эффект и забота о справедливости. Сравнение эффективности проводится как в смысле общественного благосостояния, так и с точки зрения отдельных агентов. Для количественной оценки сравнительной эффективности вычисляются отношения суммарных или индивидуальных функций выигрыша при различных способах организации. В симметричных моделях, допускающих аналитическое исследование, эти показатели эквивалентны. Для моделей с разными характеристиками агентов проводится численное исследование обоих случаев по отдельности. Результатом сравнения выступают (совпадающие или несовпадающие) структуры общественных и индивидуальных предпочтений.

В [5]-[7] исследуются дифференциальные игровые модели олигополии Курно в нормальной форме без сетевой структуры. В [8] исследуется дифференциальная кооперативная игровая модель олигополии Курно.

В этой статье исследуются дифференциальные игровые модели Курно в нормальной, кооперативной и иерархической форме с учетом сетевой структуры системы агентов, т.е. рассматривается сетевая версия динамической игровой модели олигополии Курно. Сетевые версии динамических моделей в виде сетевых игр предложены [9]-[12].

2. Модель и ее разновидности

В статье рассматривается следующая динамическая модель Курно с линейным уравнением динамики, при которой задача фирмы выглядит следующим образом:

$$J_i(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{j \in K^m(i)} \int_0^T e^{-\rho t} \{ [D - c_i - \bar{x}(t)] x_i(t) - y(t) \} dt \rightarrow \max$$

$$0 \leq x_i(t) \leq D/n, \quad i \in N; \quad \bar{x}(t) = \sum_{i \in N} x_i(t); \quad \dot{y} = \sum_{i \in N} k_i x_i(t) - \mu y(t), \quad y(0) = y_0;$$

$$G = \langle N, E \rangle; \quad K^m(i) = \{ j \in N: \rho(i, j) = m \}; \quad 0 < \delta < 1.$$

G – неориентированный граф; $y(t)$ – количество загрязняющих веществ (ЗВ) в окружающей среде в году t (переменная состояния); $x_i(t)$ – объём выпуска продукции i -й фирмой в году t (переменная управления); D – параметр спроса; c_i, k_i – удельные затраты и выбросы ЗВ i -й фирмы; μ – коэффициент амортизации загрязнения.

Заметим, что размещение двойной суммы перед интегралом означает, что наличие конкурентов само по себе положительно воздействует на прибыль i -ой фирмы, причем это воздействие тем больше, чем ближе к i -ой фирме находятся ее конкуренты. Для того чтобы фактор удаленности конкурентов оказывал положительное, а не отрицательное воздействие на прибыль i -ой фирмы, перенесем множитель, обусловленный данной двойной суммой под знак интеграла и введем его в \bar{x} .

Обозначим:

$$\kappa_i = \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{j \in K^m(i)} 1 = \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} |K^m(i)|,$$

где

$$G = \langle N, E \rangle; \quad K^m(i) = \{ j \in N: \rho(i, j) = m \}; \quad 0 < \delta < 1.$$

Заметим, что величина κ_i представляет собой центральность распада (decay centrality) i -ой вершины. Предположим, что рост величины загрязнения из-за деятельности той или иной фирмы пропорционален центральности вершины, в которой расположена данная фирма. Будем считать, что чем меньше отрицательное влияние, оказываемое конкурентами на величину спроса на продукцию

данной фирмы, тем меньше и ее удельные издержки. Будем использовать также следующие обозначения:

$$\kappa = \sum_{i=1}^n \kappa_i, \bar{c} = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Модифицируем модель следующим образом:

$$J_i(x) = \int_0^T e^{-\rho t} \{ [D - c_i - \bar{x}(t)] x_i(t) - y(t) \} dt \rightarrow \max \quad (1)$$

$$0 \leq x_i(t) \leq \frac{D}{n}, i \in N, N = \{1, 2, \dots, n\}, t \in [0, T]; \quad (2)$$

$$\dot{y} = \sum_{i \in N} \lambda \kappa_i x_i(t) - \mu y(t), y(0) = y_0, \lambda > 0, \mu > 0; \quad (3)$$

$$\bar{x}(t) = \sum_{i \in N} \kappa_i x_i(t); \quad (4)$$

$$D > n \left(c_i + \frac{\lambda \kappa_i}{\rho + \mu} \right), i \in N, 0 < c_1 < \dots < c_i < \dots < c_n < \frac{D}{n}. \quad (5)$$

Это модель олигополии Курно независимых равноправных агентов.

Модель в виде характеристической функции включает в себя выигрыш коалиции:

$$J_c(x) = \int_0^T e^{-\rho t} \{ \sum_{i=1}^n [D - c_i - \bar{x}(t)] x_i(t) - y(t) \} dt \rightarrow \max \quad (6)$$

и ограничения (2)-(5).

Иерархическая модель совпадает с игрой (1)-(5), различия возникают лишь при ее исследовании.

3. Результаты исследования модели

Для модели (1)-(5) независимых агентов найдено равновесие по Нэшу. Для кооперативной модели (6), (2)-(5) найдено Парето-оптимальное решение. Для иерархической модели (1)-(5) находится равновесие по Штакельбергу.

Пусть первый игрок – ведущий, а все остальные игроки $i = \overline{2, n}$ – ведомые, которым известна стратегия $x_1(t)$, $t \in [0, T]$ первого игрока. Каждая фирма-ведомый решает оптимизационную задачу (1.1) – (1.5) при заданной стратегии первого игрока. Обозначим

$$\tilde{x} = \sum_{j=2}^n x_j, \tilde{c} = \sum_{j=2}^n c_j, \tilde{\kappa} = \sum_{i=2}^n \kappa_i.$$

Зная зависимость \tilde{x} от x_1 , первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t} [(a - c_1 - x_1(t) - \tilde{x}(t)) x_1(t) - y(t)] dt \rightarrow \max$$

при ограничениях (2) – (5).

Далее проведена сравнительная характеристика выигрышей агентов как при различных видах связи агентов (независимость, кооперация, иерархия), так и при сетевой или несетевой структуры агентах.

Выигрыш наиболее эффективной фирмы в условиях иерархии, когда она является ведущей, в случае несетевой модели был в большинстве случаев больше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм. Доля наиболее эффективной фирмы в случае кооперации при равномерном распределении выигрыша в случае несетевой модели могла оказаться и больше, и меньше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм и при иерархии, когда данная фирма ведущая. В рассматриваемом случае сетевой модели доля наиболее эффективной фирмы в случае кооперации при равномерном распределении выигрыша значительно (в несколько раз) превосходит ее выигрыш при независимом поведении и при иерархии, когда данная фирма ведущая. При этом ее выигрыш при независимом поведении также превосходит ее выигрыш при иерархии, когда эта фирма является ведущей.

Что касается всех менее эффективных фирм, их выигрыши при кооперации в случае несетевой структуры были всегда больше их выигрышей при независимом поведении, которые в свою очередь были больше их выигрышей при иерархии, где они являлись ведомыми. То же имеет место и в рассматриваемой сетевой структуре модели: выигрыши менее эффективных фирм при кооперации всегда значительно больше их выигрышей при независимом поведении, которые в свою очередь больше их выигрышей при иерархии, где они являются ведомыми. Более того, выигрыши ведомых фирм при иерархии, когда они являются ведомыми, как правило, отрицательны, т.е. эти фирмы терпят убытки. То же самое можно сказать и о самой неэффективной фирме, которая выделялась нами отдельно в несетевой модели.

В случае сетевой структуры, так же как и в случае несетевой структуры модели, выигрыш при кооперации в случае сетевой структуры всегда значительно (даже в несколько раз) превосходит суммарный выигрыш при независимом поведении и при иерархии. Суммарный выигрыш при свободной конкуренции также превосходит суммарный выигрыш при иерархии, как это имело место и в большинстве случаев несетевой структуры.

4. Заключение

В статье проведен анализ динамической сетевой теоретико-игровой модели олигополии Курно в случае, когда агент производит экологичный товар и несет затраты на «экологичность». Учтены затраты в виде линейной функции от общих сбросов загрязняющих веществ в окружающую среду, а также в виде квадратичной функции. Также приведена сравнительная характеристика выигрышей агентов при различных структурах системы агентов: в случаях, когда агенты равноправны, когда агенты кооперируются и когда они иерархически подчиняются самому сильному агенту.

Показано, что для сильного агента-лидера иерархия предпочтительнее кооперации, которая, в свою очередь, предпочтительнее равноправности агентов. Для прочих же агентов кооперация также предпочтительнее равноправности, а вот иерархия является наименее выгодной структурой для них.

Литература

1. *Ivanov D., Dolgui A.* Viability of Intertwined Supply Networks: Extending the Supply Chain Resilience Angles towards Survivability. A Position Paper Motivated by COVID-19 Outbreak // *Int. J. of Production Research*, **58**:10 (2020). - P. 2904–2915.
2. *Sharma A., Jain D.* Game-Theoretic Analysis of Green Supply Chain Under Cost-Sharing Contract with Fairness Concern // *Int. Game Theory Review*, 2021, 23(2), 2050017. - 32 p.
3. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1995. – P. 981.
4. *Горбанева О.И., Угольников Г.А.* Теоретико-игровой анализ взаимодействия экономических агентов в олигополии Курно с учётом линейной структуры, «зелёного» эффекта и заботы о справедливости // *Математическая теория игр и ее приложения*, 15:1 (2023). – P. 3–47.
5. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Differential Game-Theoretic Models of Cournot Oligopoly with Consideration of the Green Effect // *Games*, 2023, 14(1). – P. 14.
6. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* The Interaction of Economic Agents in Cournot Duopoly Models under Ecological Conditions: A Comparison of Organizational Modes // *Automation and Remote Control*, 2023, 84(2). - P. 124–138.
7. *Korolev A.V., Kotova M.A., Ugolnitsky G.A.* Comparison of Methods of Organization and Management Efficiency in Dynamic Models of Cournot Oligopoly // *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2023, 62(1). – P. 34–56.
8. *Korolev A.V., Ougolnitsky G.A.* Cooperative game-theoretic models of the Cournot oligopoly // *International Game Theory Review*, 2022. – P. 576 – 595.
9. *Kosian D.A., Petrosyan L.A.* New Characteristic Function for Cooperative Games with Hypergraph Communication Structure // *L.A. Petrosyan et al. (eds.), Frontiers of Dynamic Games, Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications*, 2020. – P. 97-98.
10. *Petrosyan L.A., Yeung D.W.K.* Shapley value for differential network games: theory and application // *J. of Dynamics and Games*, 2021, 8(2). – P. 151–166.
11. *Petrosyan L., Bulgakova M., Sedakov A.* Time-Consistent Solutions for Two-Stage Network Games with Pairwise Interactions // *Mobile Networks and Applications*, 2021, 26. – P. 491–500.
12. *Tur A., Petrosyan L.* Strong Time-Consistent Solution for Cooperative Differential Games with Network Structure // *Mathematics*, 2021, 9. – P. 755.