DOI: 10.25728/mlsd.2023.1343

МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕЗЕРВА ДАННЫХ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Сомов С.К.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
ssomov2016@ipu.ru

Аннотация. Эффективным методом повышения надежности распределенных систем обработки данных является использование оперативного резерва из копий массивов данных, размещенных в узлах системы. Задачи поиска оптимального размещения резерва в узлах системы обладают большой вычислительной сложностью. В статье представлен ряд методов уменьшения сложности рассматриваемых задач.

Ключевые слова: Распределенные системы обработки данных, оптимальное размещение копий массивов данных, методы уменьшения вычислительной сложности задач оптимизации.

Введение

Одним из основных методов обеспечения высокого уровня сохранности данных и их эффективного использования в распределенных системах обработки данных (РСОД) является использование различного рода избыточности [1]. Применение методов информационной избыточности (например, резервирование массивов данных, репликация массивов данных, таблиц и фрагментов таблиц данных) позволяет решить задачу поддержки высокого уровня сохранности данных и программ, используемых в различных системах обработки данных.

Для повышения сохранности данных и надежности обработки запросов к данным в отдельных узлах РСОД используется метод оперативного резервирования данных [2]. Этот метод предполагает хранение нескольких идентичных копий каждого массива данных в нескольких узлах распределенной системы.

В случае использования данного метода в крупномасштабной РСОД с большим количеством узлов задача поиска оптимального размещения копий оперативного резерва становится вычислительно сложной.

В данной работе приведены формулировки и доказательства несколько теорем и утверждений, которые позволяют в ряде случаев существенно сократить вычислительную сложность задач поиска оптимального размещения резерва данных в узлах РСОД. Приведено несколько случаев использования данных теорем на примере задачи поиска оптимального размещения резерва данных в РСОД с использованием в качестве критерия оптимальности решения минимума затрат на хранение данных в узлах РСОД и на обработку запросов к массивам данных, которые генерируются в узлах системы.

1. Методы уменьшения вычислительной сложности задач оптимального размещения резерва данных в узлах РСОД

Задачи оптимального размещения в узлах РСОД оперативного резерва из копий массивов данных обладают имеют большую вычислительную сложность для распределенных систем с большим количеством узлов. В общем виде данная задача имеет следующую формулировку:

$$S(I) \to min \tag{1}$$

при следующих ограничениях:

$$\rho_j \geq \bar{\rho}; \tag{2}$$

$$E_j \geq \bar{E}; \tag{3}$$

$$x_j \geq \bar{x}_j; \tag{4}$$

$$j = \overline{1, N}$$

Здесь I это множество индексов узлов системы с размещенным в них резервом данных. Целевая функция $S(I)$ задачи определяется следующим образом:

$$S(I) = \sum_{j=1}^{N} s_j x_j + \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{i \in I} V_j ZP_{ji}(x_i) + U_i \min_{i \in N_j \cap I} ZP_{ji}(x_i) \right]$$

В данном выражении:

$ZP_{ji}(x_i) = 2d_{ij} + E_i(x_i)h_i$ – это величина затрат на обработку одного запроса к данным, сгенерированного в узле j и направленного на обработку в узле i;

$E_i(x_i)$ – средняя величина времени обработки одного запроса в узле i системы с резервом необходимых данных, состоящий из x_i копий массива;

d_{ij} – затраты ресурсов системы на передачу по каналам связи одного запроса ил ответа на запрос к данным из произвольного узла j в другой узел i;

$i \in N_j \cap I$ – определяет узел i системы с резервом, ближайший для узла j, в котором сгенерирован информационный запрос к данным системы.

Обработка запросов происходит таким образом, что информационный запрос адресуется в ближайший узел множества I с размещенным в них резервом данных, а запрос на модификацию массива данных адресуется во все узлы из множества I, так во всех узлах этого множества размещены реплики одного массива данных. Величина ρ_j обозначает вероятность получения ответа на запрос, созданный в узле j, а E_j – это среднее время получения ответа на запрос. Данные величины рассчитываются в соответствии со следующими формулами:

$$\rho_j = \sum_{j=1}^{N} \rho_{ji}(x_i) y_{ji}; \qquad E_j = \sum_{j=1}^{N} E_{ji}(x_i) y_{ji},$$

В данных формулах $y_{ji} \in \{0,1\}$ и $y_{ji} = 1$, в ситуации, когда запрос, сгенерированный в узле j, адресуется для обработки в узел i с необходимым резервом данных.

Величины $\rho_{ji}(x_i)$ и $E_{ji}(x_i)$ это, соответственно, вероятность и среднее время получения ответа на запрос, сгенерированный выданный в узле j, при его маршрутизации в узел i для обработки. Эти величины равны:

$$\rho_{ji}(x_i) = r_{ji} P_i(x_i) r_{ij} \tag{5}$$

$$E_{ji}(x_i) = \begin{cases} 2t_з + E_i(x_i) & \text{при } j \neq i \\ E_i(x_i) & \text{при } j = i \end{cases} \tag{6}$$

В формуле (5) величина $P_i(x_i)$ означает вероятность успешной обработки в узле i запроса к данным резерва, хранящегося в этом узле.

Используя формулы (5) и (6), построим множество $M_i, i = \overline{1,N}$ номеров таких узлов РСОД, запросы из которых можно адресовать в узел i для последующей обработки:

$$M_i = \left\{ j \,/\, \rho_{ji}(x_{ji}) \geq \bar{\rho};\ E_{ji}(x_{ji}) \leq \bar{E};\ x_{ji} \leq \bar{x_i} \right\} \tag{7}$$

В этом случае каждому узлу i можно сопоставить такой вектор $X_i = (x_{ji}), j = \overline{1,N}$, элемент x_{ji} которого равен минимальному объему резерва, который необходимо разместить в узле i и который будет использоваться для обработки запросов из узла j. При этом должны выполняться ограничения (2)-(4). Для определения объема x_{ji} резерва используются формулы, приведенные в [2], с учетом вероятностных характеристик каналов связи при передаче запросов и ответов и вероятностей успешной обработки запросов в узлах системы. В частности, при использовании резерва, созданного из идентичных копий массива данных, получим, что:

$$x_{ji} = \left\lfloor \ln\left\{1 - \bar{\rho}\left(r_{ji} r_{ij}\right)^{-1}\right\} (\ln q_i)^{-1} \right\rfloor + 1$$

При этом, если хотя бы одно из нижеследующих ограничений не выполняется:

$$\rho_{ji}(x_{ji}) \geq \bar{\rho};\ E_{ji}(x_{ji}) \leq \bar{E} \text{ или } x_{ji} \leq \bar{x_i}$$

Тогда значение x_{ji} будет равно нулю.

Из определения (7) множества M_i очевидно следует справедливость утверждения:

Утверждение 1. Если множество M_i пусто, т.е. $M_i = \emptyset$, тогда размещение в узле i резерва массива данных не целесообразно.

На основе данных множества M_i сформируем для узла $j = \overline{1,N}$ такое множество $N_j = \{i \;/\; j \in M_i\}$ номеров узлов системы, в которые можно адресовать запросы из узла j для их обработки. На рисунке 1 показана иллюстрация данных двух множеств.

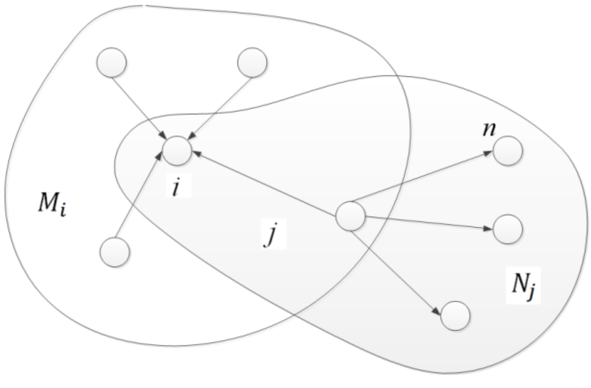

Рис. 1. Соотношение множеств M_i и N_j

Очевидно, что решение сформулированной выше задачи (1) - (4) ищется на элементах множества Û, представленного ниже:

$$\hat{U} = \bigcup_{j=1}^{N} N_j$$

Тогда можно утверждать, что утверждения (2) и (3) справедливы**.**

Утверждение 2. Если множество $\hat{U} = \emptyset$, то задача (1) - (4) не имеет решения из-за нарушения ограничений (2) - (4).

Утверждение 3. Если для узла $j \in J_з$ (где $J_з$- множество индексов узлов, в которых генерируются запросы) выполняется равенство $N_j = \{i\}$, то в узле j размещается резерв данных, используемый для обработки запросов, генерируемых только в этом узле.

Следствие 1. Из Утверждения 3 очевидно следует, что если для всех индексов $j \in J_з$ узлов системы справедливо равенство $N_j = \{i\}$, то саму РСОД и компьютерную сеть, на базе которой система работает, следует рассматривать как множество отдельных, независимых компьютеров. В этом случае для решения задач оптимального резервирования данных в этих компьютерах можно использовать традиционные методы [2]. Т.е. в каждом узле из $J_з$ системы размещается резерв массивов данных, используемый только для обработки запросов, генерируемых именно в этом узле, независимо от запросов, генерируемых в других узлах РСОД.

Далее приведена формулировка и доказательство двух теорем (1 и 2), которые позволяют уменьшить вычислительную сложность задачи (1) - (4) путем уменьшения количества вариантов маршрутизации запросов для их обработки в других узлах системы. Этот эффект достигается за счет уменьшения мощность множеств M_i и N_j).

Теорема 1. Предположим, что мы имеем:

$$i \in I,\;\; D_j = \min_{n \in N_j \cap I - \{i\}} \left[ZP_{jn}(x_n) - ZP_{ji}(x_i) \right],\;\; j \in M_i. \;(D_j > 0 \text{ при } \;\; N_j \cap I - \{i\} = \emptyset)$$

Тогда, если выполняется следующее условие:

$$D_j < 0, \tag{8}$$

то в этом случае узел j можно удалить из множества M_i. Одновременно с этим можно удалить узел i из множества N_j. При этом значение целевой функции $S(I)$ не увеличивается.

Чтобы доказать теорему 1 требуется показать, что при справедливости неравенства $D_j < 0$ удаление узла j из M_i не вызывает увеличения значения целевой функции $S(I)$, равного затратам на функционирование системы.

Будем использовать следующее обозначение:

$$Z = \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{l \in I} V_j ZP_{jl}(x_l) + x_l s_l \right]$$

Затем величину $S(I)$ затрат на функционирование системы представим в следующем виде:

$$S(I) = Z + \sum_{l=1, l \neq j}^{N} U_l \min_{n \in N_l \cap I} ZP_{ln}(x_n) + U_j \min_{n \in N_j \cap I} ZP_{jn}(x_n)$$

В том случае, если индекс узла $j \in M_i$, возможны следующие две ситуации:

1). Из узла j запрос к данным маршрутизируется в узел i. Тогда:

$$\min_{n \in N_j \cap I} ZP_{jn}(x_n) = ZP_{ji}(x_i)$$

2). Запрос к данным из узла j не адресуется в узел i. Тогда:

$$\min_{n \in N_j \cap I} ZP_{jn}(x_n) = \min_{n \in N_j \cap I - \{i\}} ZP_{jn}(x_n)$$

В том случае, когда $j \notin M_i$, так же будем иметь:

$$\min_{n \in N_j \cap I} ZP_{jn}(x_n) = \min_{n \in N_j \cap I - \{i\}} ZP_{jn}(x_n)$$

Тогда, так как из (8) следует, что $ZP_{ji}(x_i) > \min_{n \in N_j \cap I - \{i\}} ZP_{jn}(x_n)$, то получим, что $S(I) \geq S'(I)$.

Что и требовалось доказать.

Здесь $S'(I)$ это величина затрат на функционирование системы в случае, когда узел j не входит во множество M_i, т.е. ($j \notin M_i$).

Допустим, что I^N это множество индексов всех узлов РСОД, а I^0 это множество узлов системы, в которых не может быть размещен резерв данных. Тогда получим, что множество $I^c = I^N - (I \cup I^0)$ это множество таких индексов узлов РСОД, о которых неизвестно необходимо ли в них размещать резерв данных.

С учетом этих обозначений можно сформулировать следующую теорему:

Теорема. 2. Пусть

$$i \in I^c, F_j = \min_{n \in N_j \cap I} [ZP_{jn}(x_n) - ZP_{ji}(x_{ji}), j \in M_i, F_j > 0 \text{ при } N_j \cap I = \emptyset$$

Тогда, если $F_j < 0$, то узел j можно удалить из множества M_i, т.е. множества тех индексов узлов РСОД, запросы из которых можно адресовать в узел i для обработки. После удаления узла j из множества M_i значение целевой функции $S(I)$ не увеличивается.

Тогда при указанном выше условии узел i должен быть удален из множества N_j.

Так как теорема 2 это модификация теоремы 1 для случая, когда $i \in I^c$, то ее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Для каждого i-го элемента вектора $X_i (i \in I^c)$, отличного от нуля, сформируем множество M_{li} индексов таких узлов системы, запросы из которых можно адресовать для обработки в узел i, при условии выполнении ограничений (2) - (4), и при размещении узле i резерва объемом x_{li}:

$$M_{li} = \{j / j \in M_i;\ \rho_{ji}(x_{li})\} \geq \bar{\rho};\ E_{ji}(x_{li}) \leq \bar{E}$$

Для каждого узла j системы, входящего в множество M_{li}, определим значение величины $\bar{S}_{jli}$ - минимального выигрыша в затратах РСОД на обработку запросов, который может быть получен, если запрос из j –го узла будет адресован в i -й узел, а не в любой другой узел из множества N_j. При этом должно выполняться условие, что в узле i размещен резерв объемом x_{li}:

$$\bar{S}_{jli} = \min \begin{cases} \min\limits_{n \in N_j \cap I^c - \{i\}} \{\max[ZP_{jn}(x_{jn}) - ZP_{jl}(x_{li}), 0]\} \\ \min\limits_{n \in N_j \cap I} \{\max[ZP_{jn}(x_{jn}) - ZP_{jl}(x_{li}), 0]\} \end{cases} \tag{9}$$

Для каждого индекса l узла системы такого, что $x_{li} \neq 0$, определим величину $\overline{cs}_{li}$ - общего выигрыша в затратах ресурсов на эксплуатацию РСОД, который может быть получен, если в узел i

будут адресоваться запросы из всех узлов $j \in M_{li}$ при выполнении условия о том, что в узле i будет размещен резерв объемом x_{li}:

$$\bar{cs}_{li} = \sum_{j \in M_{li}} U_j \bar{S}_{jli} - \left[x_{li} S_i + \sum_{n=1}^{N} V_n Z P_{nl}(x_{li}) \right]$$

Обозначим как $\bar{cs}_{mi} = \max_{l} \bar{cs}_{li}$ и сформулируем следующую теорему 3:

Теорема. 3. Предположим, что $i \in I^c$. Тогда, если

$$\bar{cs}_{mi} > 0 \tag{10}$$

Тогда: 1) В узле i целесообразно разместить резерв объемом x_{mi}. 2) Целесообразно обрабатывать в узле i запросы к данным этого резерва, адресованные в узел i из тех узлов множества M_{mi}, для которых выполнено условие $\bar{S}_{jmi} > 0$.

Для того, чтобы доказать теорему 3 необходимо показать, что размещение резерва объемом x_{mi} в узле i уменьшает величину $S(I)$ затрат на эксплуатацию РСОД.

Будем использовать следующие обозначения:

$$I' = I \cup \{i\};\ Z_i(x_{mi}) = x_{mi} S_i + \sum_{j=1}^{N} V_j Z P_{ji}(x_{mi})$$

Затем представим величину $S(I')$ затрат на эксплуатацию системы в виде выражения:

$$S(I') = S(i) + Z_i(x_{mi}) + \bar{D}$$

В этом выражении:

$$\bar{D} = \sum_{j=1}^{N} U_j \left[\min_{n \in N_j \cap I'} Z P_{jn}(x_n) - \min_{\in N_j \cap I} Z P_{jn}(x_n) \right]$$

Требуется доказать, что $S(I') < S(i)$, то есть:

$$-\bar{D} > Z_i(x_{mi})$$

Так как $\left| N_j \cap I' \right| \geq \left| N_j \cap I \right|$, то все слагаемые в $\bar{D}$ меньше или равны нулю, т.е. $\bar{D} \leq 0$.

Запишем $\bar{D}$ в следующем виде:

$$\bar{D} = \sum_{j \in (I^N - M_{mi})} U_j \min_{n \in N_j \cap I'} Z P_{jn}(x_n) + \sum_{j \in M_{mi}} U_j \min_{n \in N_j \cap I'} Z P_{jn}(x_n) - \sum_{j \in (I^N - M_{mi})} U_j \min_{n \in N_j \cap I} Z P_{jn}(x_n) - \sum_{j \in M_{mi}} U_j \min_{n \in N_j \cap I} Z P_{jn}(x_n) -$$

В соответствии с алгоритмом построения множества M_{mi} в узел i системы могут направляться адресоваться запросы к данным только из узлов, содержащихся в этом множестве. Тогда:

$$\sum_{j \in (I^N - M_{mi})} U_j \min_{n \in N_j \cap I'} Z P_{jn}(x_n) = \sum_{j \in (I^N - M_{mi})} U_j \min_{n \in N_j \cap I} Z P_{jn}(x_n)$$

Следовательно:

$$\bar{D} = \sum_{j \in M_{mi}} U_j \left[U_j \min_{n \in N_j \cap I} Z P_{jn}(x_n) - \min_{n \in N_j \cap I'} Z P_{jn}(x_n) \right]$$

Если запрос из узла $j \in M_{mi}$ не адресуется в узел i, то

$$\left[U_j \min_{n \in N_j \cap I} Z P_{jn}(x_n) - \min_{n \in N_j \cap I'} Z P_{jn}(x_n) \right] = 0$$

В случае, когда запрос из узла $j \in M_{mi}$ адресуется в узел i, то

$$\left[U_j \min_{n\in N_j\cap I} ZP_{jn}(x_n) - \min_{n\in N_j\cap I'} ZP_{jn}(x_n)\right] = U_j \min_{n\in N_j\cap I} ZP_{jn}(x_n) - ZP_{ji}(x_{mi})$$

Тогда можно записать:

$$\overline{D} = \sum_{j\in M_i} U_j \min_{n\in N_j\cap I}\left\{max\left[ZP_{jn}(x_n) - ZP_{ji}(x_{mi}),\ \ 0\right]\right\} \tag{11}$$

Так как $\overline{D} \le 0$ и $\left|N_j \cap (I^c \cup I)\right| \ge \left|N_j \cap I\right|$, с учетом (9) и (10), получаем:

$$-\overline{D} \ge \sum_{j\in M_i} U_j \bar{S}_{jmi} > Z_i(x_{mi})$$

Что и требовалось доказать.

Справедливость рассматриваемой теоремы 3 при условии $I = \emptyset$ ($I^c = I^N$) очевидна и не требует доказательства.

Рассмотренная теорема 3 позволяет определить:

1) те из узлов системы (возможно все узлы системы), в которых необходимо разместить резерв;

2) объем резерва, который необходимо разметить в этих узлах системы;

3) подмножества тех узлов системы, запросы из которых должны быть адресованы для их обработки в каждый из этих данных с резервом.

Для каждого $j \in M_{li}$ ($i \in I^c$) определим переменную $ť_{jli}$ (разность затрат ZP на функционирование системы) следующим образом:

$$ť_{jli} = \min_{n\in N_j\cap I}\left\{max\left[ZP_{jn}(x_n) - ZP_{ji}(x_{li}),\ \ 0\right]\right\}$$

Причем $ť_{jli} = +\infty$ при $N_j \cap I = \emptyset$.

Обозначим:

$$Ť_{mi} = \max_{l} Ť_{li}\,; \quad \text{где } Ť_{li} = \sum_{j\in M_{li}} U_j ť_{jli} - \ Z_i(x_{li})$$

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема. 4. Пусть $i \in I^c$. Тогда, если $Ť_{mi} < 0$, то в узле i не нужно размещать резерв массива данных.

Размещение в узле *i* резерва объемом x_{mi} обеспечивает наибольший выигрыш в затратах $Ť_{mi}$, тогда $S(I')_{x_{i=x_{li}}} \ge S(I')_{x_{i=x_{mi}}}$ и для доказательства данной теоремы необходимо доказать то т факт, что размещение резерва объемом x_{mi} в узле *i* повышает значение целевой функции, т.е. $S(I')_{x_{i=x_{mi}}} > S(I)$. Или с учетом выражения (11): $-\overline{D} < Z_i(x_{mi})$.

Из условия теоремы следует:

$$\sum_{j\in M_{mi}} U_j ť_{jmi} < \ Z_i(x_{mi})$$

Тогда, с учетом (11) получим, что: $-\overline{D} = \sum_{j\in M_{mi}} U_j ť_{jmi}$.

Тогда $-\overline{D} < Z_i(x_{mi})$, что и требовалось доказать.

2. Пример использования представленных методов уменьшения размерности задач размещения резервных данных в РСОД

Рассмотрим работу доказанных выше теорем на примере задачи оптимального размещения резервных копий массива данных в распределенной системе, которая содержит 5 узлов. В качестве критерия оптимальности решения задачи будем использовать минимум стоимостных затрат системы на обработку запросов к данным и затраты на хранение резервных копий массивов данных в узлах системы. Будем использовать следующие и ограничения:

$$\rho_j \ge 0.98;\ \ E_j \le 4;\ \ x_j \le 3;\ \ j = \overline{1{,}5}$$

Параметры рассматриваемой РСОД представлены в таблице 1.

Таблица 1. Основные параметры РСОД

j	U_j	V_j	q_j	S_j	h_j	θ_j	τ_j
1	30	3	0.01	2	10	1	0.5
2	15	1	0.1	1	10	1.5	0.5
3	20	1	0.2	1	15	1	0.2
4	25	2	0.1	1	15	1.5	0.5
5	40	3	0.02	2	20	1	0.2

Ниже приведены стоимостные d_{ji} и надежностные r_{ji} характеристики каналов связи.

Эти характеристики таковы, что:

$$d_{ji} = d_{ij};\ d_{jj} = 0;\ r_{ji} = r_{ij};\ r_{jj} = 1\ \left(i, j = \overline{1{,}5}\right)$$

$$d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{45} = d_{15} = 3;\ d_{13} = d_{24} = d_{35} = 6;\ d_{14} = d_{25} = 4.5;$$

При этом вероятность $(r_{ji} * r_{ij})$ события, заключающегося в успешной передаче запроса из узла j в узел i (с вероятностью r_{ji}) и успешного получения ответа на этот запрос из узла i в узле j (с вероятностью r_{ij}), будет равна $r_{ji} * r_{ij}$ или $r_{ji}^2 = r_{ij}^2$, поскольку $r_{ji} = r_{ij}$.

$$r_{12}^2 = r_{23}^2 = r_{34}^2 = r_{45}^2 = r_{15}^2 = 0.98;\ \ r_{13}^2 = r_{24}^2 = r_{34}^2 = r_{35}^2 = 0.99;\ r_{14}^2 = r_{25}^2 = 0.985$$

Задержка сообщений в системе $t_3 = 0.5$. Значения для $P_i(x_i)$ и $\mathrm{E}(x_i)$ подсчитываются в соответствии с формулами из таблицы с характеристиками стратегий резервирования [2]. Построенные на основе формул (7) множества M_i, N_j и матрица $X = \left\|x_{ji}\right\|$ показаны в таблице 2.

Таблица 2. множества M_i, N_j и матрица X

j	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}	x_{j5}	M_i	N_j
1	1	0	3	3	0	1,3,4	1,3,4
2	0	2	0	2	2	2,4,5	2,4,5
3	1	0	3	0	2	1,3,5	1,3,5
4	2	2	0	2	0	1,2,4	1,2,4
5	0	3	3	0	1	2,3,5	2,3,5

Применим к узлам множества $I^c = \{1,2,3,4,5\}$ положения теоремы 1.

Для узла *i=1* получим следующие множества:

$$M_{l1}\colon M_{11} = M_{31} = \{1,3\}, M_{41} = \{1,3,4\}\,.$$

Определив $\bar{S}_{jl1}$ (для $l = 1,2,3$), по формуле (2.69), мы получим:

$$\bar{S}_{111} = \bar{S}_{131} = 26.6;\ \ \bar{S}_{311} = \bar{S}_{331} = 2.6;\ \ \bar{S}_{141} = 21.5;\ \ \bar{S}_{341} = 0;\ \bar{S}_{441} = 3.4.$$

Для $\bar{r}_{li}$ получим:

$$\bar{r}_{11} = \bar{r}_{31} = 696;\ \ \bar{r}_{41} = 646$$

Следовательно, $\bar{r}_{m1} = \bar{r}_{11} > 0$, и в узле 1 необходимо разместить резерв, т.е. $x_1 = x_{11} = 1$. При этом $M_1 = M_{11} = \{1,3\};\ N_4 = \{2,4\}$.

Для узлов 2,3,4 и 5 получим:

$$\bar{r}_{m2} = \bar{r}_{22} = -113.5;\ \bar{r}_{m3} = \bar{r}_{13} = -339;\ \bar{r}_{m4} = \bar{r}_{24} = -359.5;\ \ \bar{r}_{m5} = \bar{r}_{55} = 373;$$

Тогда, в узле i=5 необходимо разместить резерв $x_5 = x_{55} = 1$. При этом $M_5 = \{5\}, N_2 = \{2,4\}, N_3 = \{1,3\}$. Получили:

$$I = \{1,5\}, I^c = \{2,3,4\},\ x_1 = x_5 = 1.$$

Используя далее таким же образом доказанные ранее теоремы, получим следующее распределение резерва массива данных по узлам системы:

$$x_1 = x_5 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = x_4 = 0 \text{ при } N_1 = N_3 = \{1\};\ N_2 = N_4 = \{2\};\ N_5 = \{5\}\,.$$

Таким образом получено точное решение рассматриваемой задачи поскольку метод полного перебора приводит к аналогичному распределению при значении целевой функции $S(I)$ = 3400.998.

Следовательно, в данном случае использование теорем не только уменьшало на каждом шаге размерность задачи (1) - (4), но и позволило получить ее точное решение.

3. Заключение

В данной работе представлены методы, помогающие решить актуальную проблему большой вычислительной сложности задач распределения в узлах РСОД резерва используемых в системе массивов данных. В крупномасштабных распределенных системах с большим количеством узлов и сложной топологией проблема размерности оптимизационных задач имеет большую важность. В статье сформулировано и доказано несколько теорем и утверждений, позволяющих сократить размерность задач оптимизации оперативного резервирования. Приведен пример использования доказанных в работе теорем.

Литература

1. *Кульба В.В., Сомов С.К., Шелков А.Б.* Анализ влияния использования информационной избыточности на показатели надежности распределенных информационных систем/Надежность, том 22, №1, с.4-12.
2. *Микрин Е.А., Сомов С. К.* Анализ методов оперативного резервирования информации в вычислительных сетях // Проблемы управления – 2017. - №4. С. 45-53.