

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИНТЕЗА НАДЕЖНЫХ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СМЕШАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Вересников Г.С., Огородников О.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

veresnikov@mail.ru, o.v.ogorodnikov@gmail.com

Аннотация. Разработаны оптимизационные модели, в которых в качестве критериев оптимизации используются уровни меры неопределенности и вероятности. Эти модели применяются на этапе предварительного проектирования технических объектов в условиях смешанной неопределенности, когда недетерминированные параметры задаются как с использованием статистической, так и экспертной информации.

Ключевые слова: смешанная неопределенность, предварительное проектирование, технический объект, теория неопределенности, оптимизационные модели, надежность проектных решений.

Введение

Актуальность разработки оптимизационных моделей для синтеза надежных проектных решений обусловлена необходимостью предварительного проектирования технических объектов (ТО) в условиях параметрической неопределенности. В случае отсутствия точных исходных данных об объекте проектирования параметры ТО представляются недетерминированными величинами, которые не могут непосредственно использоваться в детерминированных расчетных и оптимизационных моделях. Если для недетерминированных параметров могут быть идентифицированы функции распределения вероятности, то применяется теория вероятности. С использованием теории вероятности задачи синтеза надежных проектных решений решаются посредством построения оптимизационных моделей, позволяющих найти проектные решения, обеспечивающие заданные уровни вероятности или значений целевых функций и ограничений, зависящих от случайных параметров. Направление, связанное с решением подобных задач при проектировании ТО, получило в мировой научной литературе название «reliability-based design optimization» (RBDO) [1]. В рамках этого направления предложено множество приближенных методов, позволяющих снизить вычислительные затраты, связанные с проблемой вычисления многомерных интегралов, определяющих вероятность выполнения вероятностных ограничений. В частности, в задачах RBDO широко распространены аппроксимационные методы статистического моделирования Монте-Карло и его модификации (например, importance sampling, subset simulation, separable Monte Carlo) [2, 3], FORM (first-order reliability method) [4] и SORM (second-order reliability method) [5].

Когда недостаточно статистической информации, чтобы идентифицировать функции распределения вероятностей, для задания недетерминированных параметров обращаются к экспертам и применяют теории, в которых предлагаются методы моделирования субъективной вероятности. В частности, для получения надежных проектных решений применяются нечеткие множества [6], интервальный анализ [7], возможностьная теория [8], теория неопределенности [9] и т.д. В зависимости от выбранной теории результатом расчета функций, зависящих от недетерминированных величин, являются нечеткое число, интервал, возможностьная величина, неопределенная величина. Поэтому во всех перечисленных теориях определены методы представления и обработки недетерминированных величин, позволяющие заменить целевые функции и ограничения их числовыми характеристиками. Это обеспечивает возможность формализации и решения оптимизационных задач при проектировании ТО в условиях параметрической неопределенности.

На практике задача определения надежных проектных решений нередко решается в условиях смешанной неопределенности, когда одна часть параметров определяется статистическими распределениями, другая часть параметров задается экспертами. Обычно в работах, посвященных этой проблеме, или величина, задаваемая экспертами, представляется зависимой от случайных параметров, или случайная величина, представляется зависимой от параметров, задаваемых экспертами [10-13].

Для представления недетерминированных параметров ТО, информация о которых формируется с использованием экспертных данных, выбрана теория неопределенности [14]. В теории неопределенности сочетаются высокая интерпретируемость результатов оптимизационных расчетов, возможность формализации разнородных требований к ТО, высокая вычислительная эффективность применения оптимизационных моделей. В предыдущей работе авторов были разработаны

многокритериальные оптимизационные модели с неопределенными параметрами, позволяющие найти компромисс между характеристиками ТО и необходимым уровнем надежности [9]. В статье предлагаются (раздел 1) и используются в расчетных исследованиях (раздел 2) оптимизационные модели, которые можно применять для формирования компромиссных по надежности проектных решений в условиях смешанной неопределенности, когда есть параметры как случайные, так и неопределенные.

1. Оптимизационные модели

Для формирования компромиссных по надежности проектных решений в условиях смешанной неопределенности разработаны оптимизационные модели, в которых уровни вероятности и меры неопределенности используются в качестве критериев оптимизации. В общем виде эти модели можно представить в следующем виде.

Модель 1. Общая оптимизационная модель для поиска компромиссных по надежности решений

$$\min/\max_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \bar{\beta}} \left[D_1[f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega}), \alpha_{f_1}, \beta_{f_1}], \dots, D_m[f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega}), \alpha_{f_m}, \beta_{f_m}] \right], \quad (1)$$

$$\max_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \bar{\beta}} [\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_m}, \beta_{f_1}, \dots, \beta_{f_m}], \quad (2)$$

$$M((x_j + \delta_j) \geq a_{\delta_j}) \geq \alpha_{a_{\delta_j}}, \quad (3)$$

$$M((x_j + \delta_j) \leq b_{\delta_j}) \geq \alpha_{b_{\delta_j}}, \quad (4)$$

$$P((y_h + \lambda_h) \geq a_{\lambda_h}) \geq \beta_{a_{\lambda_h}}, \quad (5)$$

$$P((y_h + \lambda_h) \leq b_{\lambda_h}) \geq \beta_{b_{\lambda_h}}, \quad (6)$$

$$j=1, \dots, k, h=1, \dots, z.$$

где D_1, \dots, D_m – числовые характеристики целевых функций $f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega}), \dots, f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})$, зависящие от уровней меры неопределенности $\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_m}$ и вероятности $\beta_{f_1}, \dots, \beta_{f_m}$; $\bar{\xi}=(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\bar{\omega}=(\omega_1, \dots, \omega_c)$ – вектора входных неопределенных и случайных параметров; $\bar{\alpha}=(\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_m})$, $\bar{\beta}=(\beta_{f_1}, \dots, \beta_{f_m})$; $\bar{x}'=(x_1+\delta_1, \dots, x_k+\delta_k)$ и $\bar{y}'=(y_1+\lambda_1, \dots, y_z+\lambda_z)$ – вектора оптимизируемых неопределенных и случайных параметров; $\delta_1, \dots, \delta_k$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_z$ – независимые неопределенные и случайные параметры, определяющие недетерминированность (неточность) оптимизируемых параметров, $M(\bullet)$ – мера неопределенности события \bullet , $P(\bullet)$ – вероятность события \bullet , $[a_{\delta_j}, b_{\delta_j}]$ и $[a_{\lambda_h}, b_{\lambda_h}]$ – диапазоны изменения неопределенных и случайных оптимизируемых параметров, $\alpha_{a_{\delta_j}}$, $\alpha_{b_{\delta_j}}$ и $\beta_{a_{\lambda_h}}$, $\beta_{b_{\lambda_h}}$ – уровни меры неопределенности и вероятности для неопределенных и вероятностных ограничений на оптимизируемые параметры.

Неопределенные параметры в модели 1 задаются функциями распределения неопределенности, аппроксимирующими экспертные данные. Функция распределения неопределенности неопределенного параметра \bullet имеет вид $\Phi_{\bullet}(d) = M\{\bullet \leq d\}$ (d – детерминированное значение). Аксиоматика и методы, связанные с мерой неопределенности M , по аналогии с аксиоматикой Колмогорова А.Н. описываются в теории неопределенности [14].

Случайные параметры задаются функциями распределения вероятности, идентифицируемыми на основе статистических данных. Неопределенные и вероятностные ограничения в модели 1 позволяют контролировать нарушение границ неопределенными и случайными оптимизируемыми параметрами, посредством регулирования уровней неопределенности и вероятности. Недетерминированная часть оптимизируемых параметров может быть равной 0 (отсутствовать), в этом случае оптимизируемый параметр является детерминированным. Уменьшение количества критериев в модели 1 может выполняться стандартными методами скаляризации.

Для формирования числовых характеристик D_1, \dots, D_m предлагается функции $f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega}), \dots, f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})$ рассматривать как неопределенные величины, зависящие от случайных величин. Тогда на первом этапе определяются числовые характеристики этих неопределенных величин $D_1'(\bar{y}', \bar{\omega}), \dots, D_m'(\bar{y}', \bar{\omega})$, которые зависят от случайных параметров. Затем на втором этапе $D_1'(\bar{y}', \bar{\omega}), \dots, D_m'(\bar{y}', \bar{\omega})$ рассматриваются как случайные величины и определяются их числовые характеристики

D_1, \dots, D_m , представленные в модели 1. Таким образом, числовые характеристики D_1, \dots, D_m являются результатом интеграции числовых характеристик случайных и неопределенных величин. В частном случае, если целевая функция зависит или только от случайных, или только неопределенных параметров, то используется одна числовая характеристика.

Разработаны модели 2-3, которые являются частными случаями общей оптимизационной модели. В этих моделях для формирования числовых характеристик D_1, \dots, D_m используются числовые характеристики случайных и неопределенных величин – квантили, критические значения (квантили неопределенных величин) и размеры диапазонов в котором находятся значения целевых функций. Для краткости ограничения, связанные с проверкой границ изменения оптимизируемых параметров не приводятся (заменяются многоточием).

Модель 2 используется при необходимости минимизации целевых функций для нахождения компромисса между значениями, которые не должны превышать целевые функции, и уровнями вероятности/уверенности.

Модель 2. Числовые характеристики – квантили и критические значения (минимизация целевых функций):

$$\min_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \beta} [r_{f_1}, \dots, r_{f_m}], \quad (7)$$

$$\max_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \beta} [\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_m}, \beta_{f_1}, \dots, \beta_{f_m}], \quad (8)$$

$$P(\inf_{\alpha_{f_1}} [f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_1}) \geq \beta_{f_1}, \quad (9)$$

...

$$P(\inf_{\alpha_{f_m}} [f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_m}) \geq \beta_{f_m}, \quad (10)$$

...

Если при формализации требований к ТО требуется максимизация целевых функций, то применяется модель 3, которая является аналогом модели 2.

Модель 3. Числовые характеристики – квантили и критические значения (максимизация целевых функций):

$$\max_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \beta} [r_{f_1}, \dots, r_{f_m}], \quad (11)$$

$$\max_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \beta} [\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_m}, \beta_{f_1}, \dots, \beta_{f_m}], \quad (12)$$

$$P(\sup_{\alpha_{f_1}} [f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \geq r_{f_1}) \geq \beta_{f_1}, \quad (13)$$

...

$$P(\sup_{\alpha_{f_m}} [f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \geq r_{f_m}) \geq \beta_{f_m}, \quad (14)$$

...

Оптимизационная модель 4 позволяет найти компромисс между размером диапазона, в котором находятся значения целевых функций, и степенями уверенности/вероятности.

Модель 4. Числовые характеристики – квантиль и размер диапазона для целевой функции:

$$\min_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \beta} [r_{f_1}, \dots, r_{f_m}], \quad (15)$$

$$\max_{\bar{x}', \bar{y}', \bar{\alpha}, \beta} [\alpha_{f_1}, \dots, \alpha_{f_m}, \beta_{f_1}, \dots, \beta_{f_m}], \quad (16)$$

$$P(D[f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_1}) \geq \beta_{f_1}, \quad (17)$$

...

$$P(D[f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_1}) \geq \beta_{f_1}, \quad (18)$$

$$D[f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] = \inf_{\alpha_{f_1}} [f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] - \sup_{\alpha_{f_1}} [f_1(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})], \quad (19)$$

$$D[f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] = \inf_{\alpha_{f_m}} [f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] - \sup_{\alpha_{f_m}} [f_m(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})], \quad (20)$$

$$\alpha_{f_1} > 0.5, \dots, \alpha_{f_m} > 0.5,$$

Представленные оптимизационные модели могут быть дополнены ограничениями, в которых функции, зависящие от недетерминированных параметров, заменены их числовыми характеристиками. Например, ограничениями вида $P(M(g_j(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega}) \leq 0) \geq \alpha_{g_j}) \geq \beta_{g_j}, j=1, \dots, p$, где p – количество ограничений.

В соответствии с положениями теории неопределенности в предлагаемых оптимизационных моделях критические значения при выполнении требований к монотонности целевых функций по неопределенным параметрам могут быть рассчитаны следующим образом (если целевые функции немонотонны по неопределенным параметрам, то применяются приближенные алгоритмы [15]):

$$\begin{aligned} \inf_{\alpha_{f_i}} (f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})) = & f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots \\ & \dots, x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(\alpha_{f_i}), x_{l+1} + \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots \\ & \dots, x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_1}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_2}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots \\ & \dots, \Phi_{\xi_q}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots, \Phi_{\xi_n}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \bar{y}', \bar{\omega}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha_{f_i}} (f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})) = & f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots \\ & \dots, x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), x_{l+1} + \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots \\ & \dots, x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_1}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_2}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots \\ & \dots, \Phi_{\xi_q}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots, \Phi_{\xi_n}^{-1}(\alpha_{f_i}), \bar{y}', \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (22)$$

где целевая функция f_i строго возрастает по $\xi_1, \dots, \xi_q, x_1', \dots, x_l'$ и строго убывает по $\xi_{q+1}, \dots, \xi_n, x_{l+1}', \dots, x_k'$; $\Phi_{\xi_1}^{-1}, \dots, \Phi_{\xi_n}^{-1}$ и $\Phi_{\delta_1}^{-1}, \dots, \Phi_{\delta_k}^{-1}$ – обратные функции распределения неопределенных параметров ξ_1, \dots, ξ_n и $\delta_1, \dots, \delta_k$.

Для каждого кортежа $(\{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, \{\lambda_1\}_j, \dots, \{\lambda_z\}_j)$, состоящего из значений случайных параметров, при заданном α_{f_i} существуют аналитические выражения для вычисления критических значений $\inf_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})]$ и $\sup_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})]$. В связи с этим расчет вероятностей $P(\inf_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_i})$ и $P(\sup_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \geq r_{f_i})$ для проверки вероятностных ограничений в моделях 2-3 может выполняться стандартными статистическими методами. Например, с использованием аппроксимации вероятностей относительными частотами выполнения неравенств $\inf_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_i}$ и $\sup_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \geq r_{f_i}$.

Пусть $I_{\inf}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j)]$ и $I_{\sup}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j)]$, $j=1, \dots, N$ – индикаторные функции, которые принимают значения 0 или 1, определяющие факт невыполнения или выполнения ограничений $\inf_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_i}$ и $\sup_{\alpha_{f_i}} [f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \geq r_{f_i}$ при каждом сгенерированном кортеже значений случайных параметров $(\{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, \{\lambda_1\}_j, \dots, \{\lambda_z\}_j)$.

$$I_{\inf}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j)] = \begin{cases} 1, \text{ если } f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots \\ \dots, x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(\alpha_{f_i}), x_{l+1} + \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots \\ \dots, x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_1}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_2}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots \\ \dots, \Phi_{\xi_q}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots, \Phi_{\xi_n}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \\ \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j \leq r_{f_i}, \end{cases} \quad (23)$$

$$I_{\text{sup}}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j)] = \begin{cases} 1, \text{ если } f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots \\ \dots, x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), x_{l+1} + \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots \\ \dots, x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_1}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_2}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \dots \\ \dots, \Phi_{\xi_q}^{-1}(1 - \alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(\alpha_{f_i}), \dots, \Phi_{\xi_n}^{-1}(\alpha_{f_i}), \\ \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j \geq r_{f_i}. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда вероятности выполнения ограничений могут быть приближенно найдены как отношение суммы значений индикаторных функций к общему количеству генераций значений случайных параметров N .

$$P[\inf_{\alpha_{f_i}}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \leq r_{f_i}] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{\text{inf}}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j)], \quad (25)$$

$$P[\sup_{\alpha_{f_i}}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \bar{y}', \bar{\omega})] \geq r_{f_i}] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{\text{sup}}[f_i(\bar{x}', \bar{\xi}, \{\omega_1\}_j, \dots, \{\omega_c\}_j, y_1 + \{\lambda_1\}_j, \dots, y_z + \{\lambda_z\}_j)]. \quad (26)$$

Дополнительно могут применяться методы, позволяющие уменьшить число N с сохранением точности вычислений числовых характеристик случайных величин, например, importance sampling [2,3]. Полученные выражения используются в рамках расчетов по моделям 2-3 с использованием стандартных многокритериальных оптимизационных решателей. В качестве оптимизационного решателя для проведения расчетных исследований, описанных в разделе 2, использовался генетический алгоритм, входящий в пакет прикладных программ Матлаб. Этот алгоритм обеспечивает высокую вычислительную эффективность при решении задач многокритериальной оптимизации.

2. Результаты расчетных исследований

Для исследования адекватности оптимизационных моделей, предложенных в разделе 1, формализуется и решается оптимизационная задача определения высоты – x_1 (мм.) и толщины труб – x_2 (мм.) симметричной двухэлементной опорной конструкции [15] в условиях смешанной неопределенности.

Схема симметричной двухэлементной опорной конструкции, на которую вертикально вниз воздействует внешняя сила $F(H)$, приводящая к отклонению точки воздействия на величину v (мм.) представлена на рис. 1.

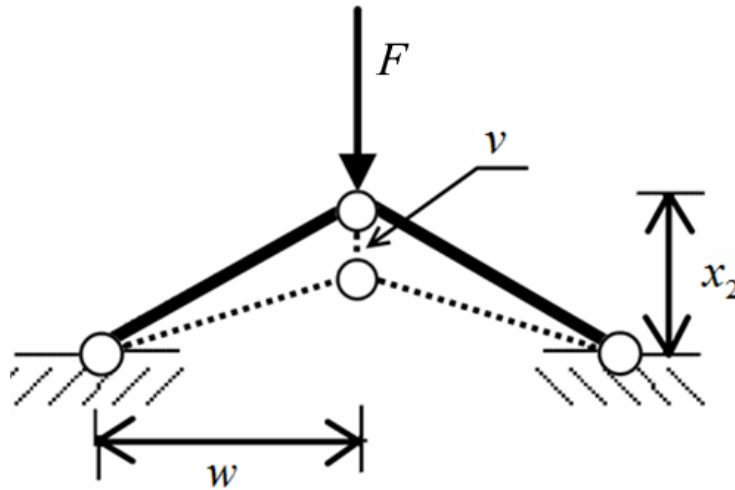


Рис. 1. Схема симметричной двухэлементной опорной конструкции

Пусть для решения задачи определения проектных параметров симметричной двухэлементной опорной конструкции в детерминированной постановке используется оптимизационная модель 5 с ограничениями.

Модель 5.

$$\min_x [v, m], \quad (27)$$

где

$$m=2\pi\rho tx_1\sqrt{w^2+x_2^2}, \quad (28)$$

$$v=\frac{F(w^2+x_2^2)^{3/2}}{2\pi\gamma x_1 x_2^2}, \quad (29)$$

при условии $s - s_{cr} \leq 0$, где

$$s=\frac{F}{2\pi tx_1 x_2}\sqrt{w^2+x_2^2}, \quad (30)$$

$$s_{cr}=\frac{1}{8}\pi^2\gamma\frac{t^2+x_1^2}{w^2+x_2^2}, \quad (31)$$

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1,$$

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2,$$

где t – толщина труб, γ – модуль упругости; w – ширина конструкции, ρ – плотность массы, $\vec{x}'=(x_1, x_2)$ – вектор оптимизируемых параметров, x_1 – диаметр труб (изменяется от 1 до 100 мм.); x_2 – высота конструкции (изменяется от 10 до 1000 мм.).

Значения детерминированных параметров: $\gamma = 220 \text{ кН}\cdot\text{мм}^2$, $t = 2,5 \text{ мм}$, $\rho = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ г/мм}^3$, $F=150 \text{ кН}$, $w = 750 \text{ мм}$.

Результаты расчетов по детерминированной оптимизационной модели представлены на рис. 2.

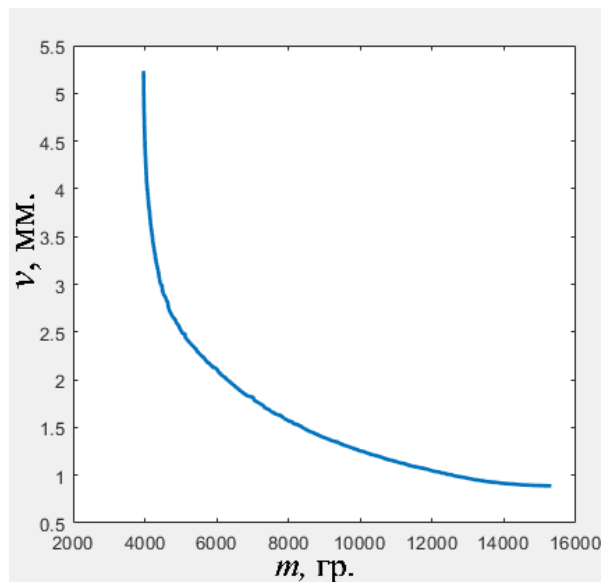


Рис. 2. Симметричная двухэлементная опорная конструкция

Используя модель 5, формализуем оптимизационную задачу проектирования симметричной двухэлементной опорной конструкции в условиях смешанной неопределенности. Для этого выберем в качестве неопределённого параметра ширину конструкции w , а в качестве случайного параметра нагрузку на конструкцию F .

Функции распределения неопределенности и вероятности для этих параметров представлены на рис. 3.

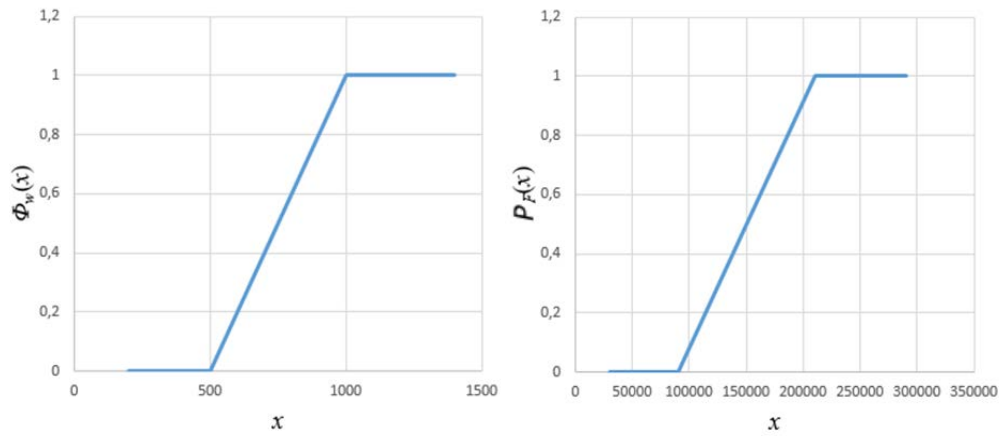


Рис. 3. Функции распределения неопределенности и вероятности для параметров w и F

Для определения параметров симметричной двухэлементной опорной конструкции в условиях смешанной неопределенности на основе моделей 2 и 5 разработана оптимизационная модель 6, в которой используются ожидаемое значение для массы m , критическое значение и квантиль для отклонения v . В ограничении на $s - s_{cr}$ степень уверенности $\alpha_{s - s_{cr}} = 0,98$, уровень вероятности $\beta_{s - s_{cr}} = 0,98$.

Модель 6.

$$\min_{\bar{x}} [E[m], r_v], \quad (32)$$

$$\max_{\bar{x}} [\alpha_v, \beta_v], \quad (33)$$

$$P(\inf_{\alpha_v} [v] \leq r_v) \geq \beta_v, \quad (34)$$

$$P(M(s - s_{cr} \leq 0) \geq \alpha_{s - s_{cr}}) \geq \beta_{s - s_{cr}}. \quad (35)$$

Результаты оптимизационных расчетов по этой модели представлены на рис. 4. Из точек Парето-фронта в трехмерном пространстве формируется объемная фигура (значения $E[m]$ на графике не приводятся).

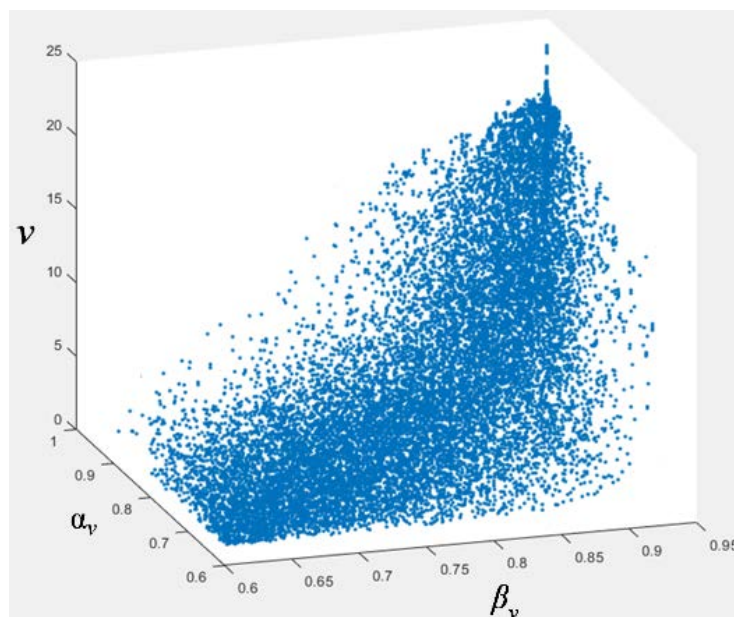


Рис. 4. Результаты расчетов по модели 5

Если выбрать фиксированные значения α_v и β_v , то может быть построен Парето-фронт, позволяющий найти компромисс между массой m и отклонением v (пример показан на рис. 5).

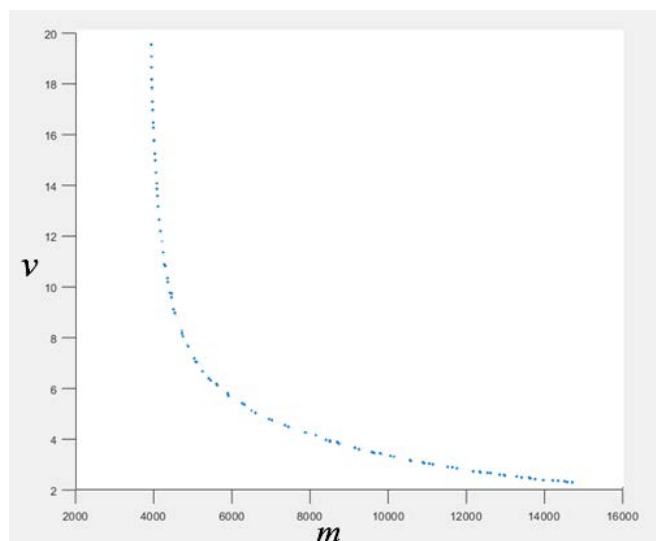


Рис. 5. Парето-фронт при $\alpha_v = 0,9$ и $\beta_v = 0,9$

При сравнении результатов, полученных по моделям 5 и 6, можно видеть, что требования к надежности проектных решений приводят к смещению Парето-фронта в область больших («худших») значений целевых функций. Полученный результат соответствует теории и практике решения оптимизационных задач в условиях параметрической неопределенности.

3. Заключение

С использованием теории неопределенности разработаны многокритериальные оптимизационные модели для определения компромиссных по надежности проектных решений в условиях смешанной неопределенности. В этих оптимизационных моделях неопределенная величина представляется зависимой от случайных параметров и в качестве дополнительных критериев оптимизации используются уровни меры неопределенности и вероятности. Использование таких критериев оптимизации позволяет найти компромисс между необходимыми характеристиками ТО и уровнями уверенности/вероятности. Применение предложенных моделей на практике позволяет обеспечить необходимые характеристики и работоспособность ТО, когда на этапе предварительного проектирования информация о недетерминированных параметрах формируется одновременно с использованием статистических и экспертных данных. Адекватность предложенных моделей проверена при решении задачи определения параметров симметричной двухэлементной опорной конструкции в условиях смешанной неопределенности.

Литература

1. Zhang X. Review of Reliability-Based Design Optimization Approach and Its Integration with Bayesian Method // Proceedings of 3rd International Conference on Energy Equipment Science and Engineering. – Beijing, China. – 2018. – Vol. 128. – P. 012109.
2. Chaudhuri A., Kramer B., Willcox K.E. Information Reuse for Importance Sampling in Reliability-Based Design Optimization // Reliability Engineering & System Safety. – 2020. – Vol. 201. – P. 106853.
3. Pannerselvam K., Yadav D., Ramu P. Scarce Sample-Based Reliability Estimation and Optimization Using Importance Sampling // Mathematical and Computational Applications. – 2022. – Vol. 27(6). – P. 99.
4. Lopez R.H., Beck A.T. Reliability-Based Design Optimization Strategies Based on FORM: A Review // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2022. – Vol. 34(4). – P. 506–514.
5. Hu Z., Mansour R., Olsson M., Du X. Second-order reliability methods: a review and comparative study // Structural and multidisciplinary optimization. – 2021. – Vol. 64. – № 6. – P. 3233–3263.
6. Meng Z., Li C., Hao P. Unified reliability-based design optimization with probabilistic, uncertain-but-bounded and fuzzy variables // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2023. – Vol. 407. – P. 115925.
7. Du X. Reliability-based design optimization with dependent interval variables // Numerical methods in engineering. – 2012. – Vol. 91, Issue 2. – P. 218–228.
8. Mourelatos Z.P., Zhou J., Kloess A. A Design Optimization Method Using Possibility Theory // Journal of passenger car: mechanical systems journal. – 2005. – Vol. 114. – P. 257–266.

9. *Veresnikov G., Ogorodnikov O.* Uncertain Programming Models for Finding Reliably Compromise Design Solutions // Proceedings of 15th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). – 2022. – IEEE. – P. 22238452.
10. *Zhang H., Wang H., Wang Y., Hong D.* Incremental shifting vector and mixed uncertainty analysis method for reliability-based design optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2019. – Vol. 59. – P. 2093–2109.
11. *Zhang L.-X., Meng X.-J., Zhang H.* Reliability-Based Design Optimization for Design Problems with Random Fuzzy and Interval Uncertainties // International Journal of Computational Methods. – 2020. – Vol. 17, № 06. – P. 1950018.
12. *Mourelatos Z.P., Zhou J., Kloess A.* A Design Optimization Method Using Possibility Theory // Journal of passenger car: mechanical systems journal. – 2005. – Vol. 114. – P. 257–266.
13. *Li G., Lu Z., Li L., Ren B.* Aleatory and epistemic uncertainties analysis based on non-probabilistic reliability and its kriging solution // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40, Issues 9–10. – P. 5703-5716.
14. *Liu B.* Theory and Practice of Uncertain Programming. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 201 p.
15. *Zhu Y.* Functions of uncertain variables and uncertain programming // Journal of Uncertain Systems. – Vol. 6(4). – 2012. – P. 278-288.
16. *Messac A., Ismail-Yahaya A.* Multiobjective robust design using physical programming // Structural and Multidisciplinary Optimization. – Vol. 23. 2002. – P. 357-371.