DOI: 10.25728/mlsd.2023.1259

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДРОБНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Амосов О.С., Амосова С.Г.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
osa18@yandex.ru

Аннотация. Дана постановка нелинейной задачи оценивания состояния, неизвестных параметров и дробного порядка динамической системы. Решение дано на основе декомпозиционного подхода, где используются фильтры Калмана, нейронные сети, нечеткие системы, вейвлеты и их комбинации. Приведен пример. Дана оценка точности оценивания и быстродействия.

Ключевые слова: оценивание, дробный порядок, декомпозиционный подход, иерархическая система, точность, быстродействие.

Введение

Отличительной особенностью настоящего времени является разработка современных высокоточных динамических систем различного назначения. Одним из действенных способов повышения адекватности математических моделей исследуемым системам является использование теории дробного исчисления (Fractional Calculus) в отраслях человеческой деятельности, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. В основе дробного исчисления или исчисления нецелых порядков лежат понятия производной и интеграла нецелых порядков [1–3]. В настоящее время стремительно растет число применений дробного исчисления в фундаментальных законах естествознания, автоматическом управлении, обработке сигналов, физике, электронике, механике, биологии, медицине, экономике и других областях [3].

При создании современных динамических систем разработчикам приходится решать задачу оценивания состояния и идентификации их параметров. Для решения указанной задачи эффективны методы нелинейной оптимальной фильтрации, среди которых наиболее широко на практике используются фильтры калмановского типа [4–6].

В последние годы для решения нелинейных задач оценивания и идентификации используются нейросетевые и нечеткие технологии, вейвлет- и фрактальный анализ, их совместное использование в виде гибридных алгоритмов обработки [7, 8].

При создании более качественных математических моделей систем и датчиков предлагается учитывать фрактальные свойства и динамику процессов, основанную на исчислении дробного порядка, что усложняет алгоритмы фильтрации, которые должны функционировать в режиме реального времени. Это происходит в силу того, что алгоритмы оценивания должны использовать оценки не только предпоследнего, но и всех предыдущих шагов фильтрации, поскольку уравнения состояния дробных динамических систем определяются марковскими процессами высшего порядка [9–11]. В случае использования математической модели системы дробного порядка, наряду с оценкой переменных состояния и неизвестных параметров необходимо идентифицировать и сам порядок системы.

Поэтому целью настоящего доклада является описание подхода на основе декомпозиции для синтеза эффективных по точности и быстродействию субоптимальных алгоритмов оценивания состояния и идентификации параметров и дробного порядка нелинейных стохастических систем.

1. Постановка задачи нелинейного оценивания

Необходимо оценить n-мерный вектор состояния динамической системы $\mathbf{x}_i = [x_{1i} \quad \dots \quad x_{ni}]^T$, $i = 0,1,\dots$ по m-мерному вектору измерений $\mathbf{y}_k = [y_{1k} \quad \dots \quad y_{mk}]^T$, $k = 1,2,\dots$ исходя из условия минимизации заданного критерия. В состав вектора состояния может входить и u–мерный вектор неизвестных и подлежащих идентификации параметров системы $\mathbf{a}_i = [a_{1i} \quad \dots \quad a_{ui}]^T$. В случае использования математической модели дробного порядка, необходимо идентифицировать и порядки N уравнений состояния системы $\boldsymbol{\mu}_i = [\mu_{1i} \quad \dots \quad \mu_{Ni}]^T$.

2. Решение задачи нелинейного оценивания на основе декомпозиционного подхода

Оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}_{i/k}$ определим как $\hat{\mathbf{x}}_{i/k} = \mathbf{F}_i(\mathbf{Y}_1^k)$, $\mathbf{Y}_1^k = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, ..., \mathbf{y}_k^T)^T$. Таким образом, для решения задачи оценки состояния нелинейной стохастической системы необходимо найти в общем случае нелинейную функцию $\mathbf{F}_i(\bullet)$ некоторым рациональным, обоснованным способом [8].

Для того, чтобы показать, как учет дробности порядка динамической системы ведет к усложнению модели и алгоритму оценивания, сопоставим модели дискретной нелинейной стохастической системы целого и дробного порядков, приведенные в [10, 11]. Представим их в табл. 1.

Таблица 1. Сопоставление модели дискретной нелинейной стохастической системы целого и дробного порядков

	Дискретная нелинейная стохастическая система целого порядка	**Дискретная нелинейная стохастическая система дробного порядка**
Уравнение для вектора состояния	$\mathbf{x}_i = \Delta^1 \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{\Phi}_i(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{w}_i$	$\Delta^\gamma \mathbf{x}_i = \mathbf{\Phi}_{di}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{w}_i$, $\mathbf{x}_i = \Delta^\gamma \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \gamma_j \mathbf{x}_{i-j}$
Измерения	$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i$	
Функции, матрицы	$\mathbf{\Phi}_i(\mathbf{x}_{i-1}), \mathbf{\Phi}_{di}(\mathbf{x}_{i-1}), \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) -$ n - и m -мерные нелинейные вектор- функции, $\mathbf{Q}_i - p \times p, \mathbf{R}_i - m \times m$; $\mathbf{\Phi}_i^{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{\Phi}_i^{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}}$, $\mathbf{\Phi}_{di}^{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{\Phi}_{di}^{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}_{di}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}} - n \times n$, $\mathbf{H}_i^{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{H}_i^{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}) = \left[\frac{\partial \mathbf{s}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}} - m \times n$	

В табл. 2 сопоставлены основные соотношения для алгоритма обобщенного фильтра Калмана целого и дробного порядков, рассмотренные в [10, 11].

Таблица 2. Сопоставление соотношений для алгоритма обобщенного фильтра Калмана

	Обобщенный ФК (ОФК)	**Дробный обобщенный ФК (ДОФК)**
Прогноз	$\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^1 \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \mathbf{\Phi}_i(\hat{\mathbf{x}}_{i-1})$	$\Delta^\gamma \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \mathbf{\Phi}_{di}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1})$, $\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^\gamma \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \gamma_j \hat{\mathbf{x}}_{i-j}$
Матрица ковариаций ошибок прогноза	$\mathbf{P}_{i/i-1} = \mathbf{\Phi}_i^{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{\Phi}_i^{\mathbf{x}})^T + \mathbf{Q}_i$	$\mathbf{P}_{i/i-1} = (\mathbf{\Phi}_{di}^{\mathbf{x}} + \gamma_1) \mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{\Phi}_{di}^{\mathbf{x}} + \gamma_1)^T + \mathbf{Q}_i + \sum_{j=2}^{i} \gamma_j \mathbf{P}_{i-j} \gamma_j^T$

Сравнение уравнений для вектора состояния целого и дробного порядка табл. 1 показывает, что последние описывают марковские процессы более высокого порядка, которые обладают краткосрочной и долгосрочной памятью. Как следствие, использование математической модели динамической системы дробного порядка приводит к тому, что при расчете оценки прогноза и матрицы ковариаций ошибок прогноза для дробного фильтра табл. 2 используются значения оценки и матрицы ковариаций ошибок оценивания не только с последнего предыдущего шага, как в случае традиционного фильтра Калмана, но и со всех предыдущих шагов. Это приводит к усложнению алгоритмов для достижения большей точности оценивания.

Поэтому для повышения быстродействия дробных алгоритмов оценивания нами предлагается использование подхода на основе декомпозиции.

Вне зависимости от того, какой из методов оценивания будет использоваться, для повышения быстродействия настройки алгоритмов оценивания предлагается использование принципа декомпозиции сложных систем [8, 12]. Синтезируемые системы оценивания и идентификации могут быть построены с использованием трех базовых представлений подсистем. К ним относят: каскадное, параллельное соединение элементов, а также соединение замыканием обратной связи [8, 12]. В случае совместного оценивания переменных состояния, идентификации неизвестных параметров и дробных порядков динамической системы схема декомпозиции может быть представлена как на Рис. 1, где БП – блок памяти.

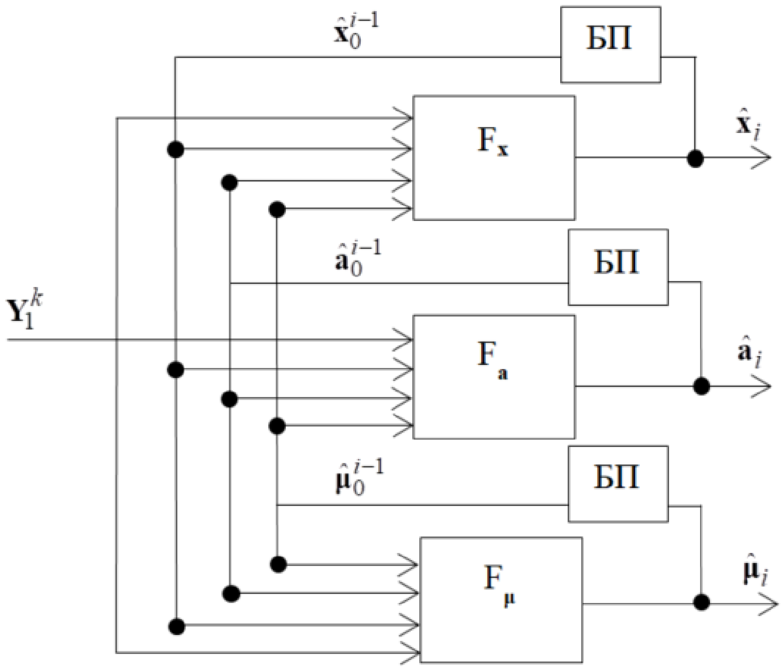

Рис. 1. Схема декомпозиции для совместного оценивания состояния, параметров и порядка

3. Пример

В качестве примера рассмотрена задача совместной оценки скалярной переменной состояния x_i, $x_i = ax_{i-1} + w_i$, неизвестного параметра a и дробного порядка μ по зашумленным измерениям вида $y_i = x_i + v_i$. Здесь w_i и v_i белые гауссовские шумы с нулевым средним. Такая задача совместного оценивания состояния и идентификации является нелинейной [11] и для ее решения необходимо использование обобщенного фильтра Калмана, если выбраны для решения алгоритмы калмановского типа.

Для данной скалярной системы может быть использована схема, представленная на рис. 1, где в качестве векторов состояния, параметров и порядков выступают скалярные переменная x_i, параметр a и порядок μ. Если для решения задачи используется ансцентный фильтр Калмана, то эта схема, как частный случай охватывает схему фильтрации, предложенную в [9] для дробного ансцентного фильтра Калмана.

На рис. 2 представлены оценки неизвестного параметра a как с помощью обобщенного фильтра Калмана, так и с помощью дробного обобщенного фильтра Калмана. Точность оценивания с помощью ДОФК заметно выше.

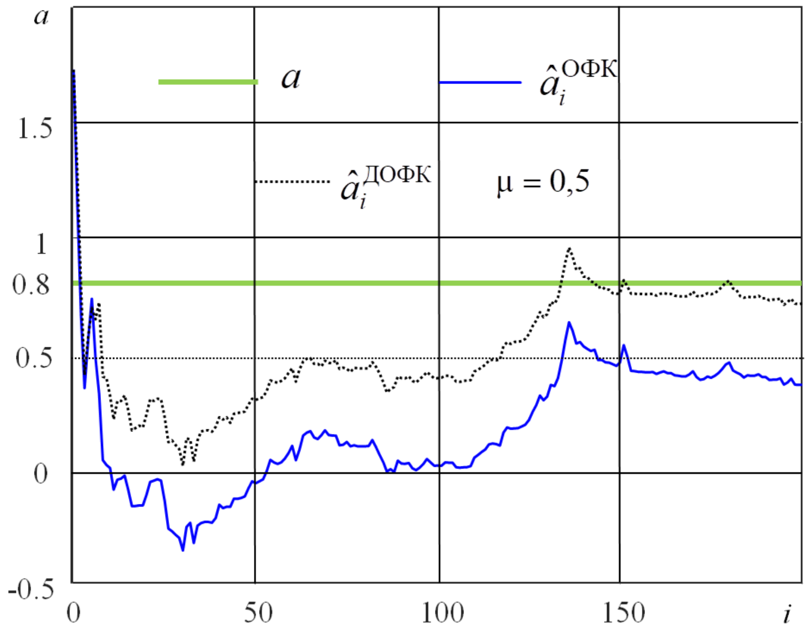

Рис. 2. Оценивание неизвестного параметра a

На данном примере, в случае, когда ошибки измерений v_i, $i=\overline{1.l}$ представляют собой независимые друг от друга и от x_i центрированные случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[-b/2, b/2]$ иллюстрируется использование для фильтрации разных методов на основе фильтров Калмана, нейронечетких сетей и вейвлетов. Дано их сопоставление по точности и быстродействию. Быстродействие декомпозиционных алгоритмов выше в несколько раз, а точность оценивания близка к потенциально достижимой.

4. Заключение

Дана постановка нелинейной задачи совместного оценивания состояния, неизвестных параметров и дробного порядка динамической системы. Предложено решение на основе декомпозиционного подхода. В качестве алгоритмов фильтрации могут быть использованы фильтры калмановского типа, нейронные сети, нечеткие системы, вейвлеты и их комбинации в виде гибридных алгоритмов. Приведен пример для совместного оценивания состояния, неизвестного параметра и дробного порядка системы. Дана оценка точности оценивания и быстродействия алгоритмов, построенных на основе декомпозиции.

Литература

1. *Летников А.В.* Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матемематический Сборник. – 1868. – т. 3, вып.1. – С. 1–68.
2. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus // Academic Press, 1974. – 234 p.
3. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008. – 256 с.
4. *Степанов О.А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправленное и дополненное. Ч.1. Введение в теорию оценивания / О.А. Степанов. – СПб: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. – 509 с.
5. *Степанов О.А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации Изд. 3-е, исправленное и дополненное. Ч.2. Введение в теорию фильтрации / О.А. Степанов. – СПб: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. – 428 с.
6. *Haykin S.* Kalman Filtering and Neural Networks; John Wiley & Sons Inc.: New York, NY. USA, 2001. – 298 p.
7. *Stepanov O.A.* Nonrecurrent linear estimation and neural networks / O.A. Stepanov, O.S. Amosov// IFAC Proceedings Volumes. – 2004. – 37(12). – P. 213–218.
8. *Amosov O.S.* Decomposition synthetic approach for optimum nonlinear estimation /O.S. Amosov, S.G. Baena// 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems. – Saint Petersburg, 2015. – P. 829–834.

9. *Sierociuk D.* Triple Estimation of Fractional Variable Order, Parameters, and State Variables Based on the Unscented Fractional Order Kalman Filter / D. Sierociuk, M. Macias // Sensors. – 2021. – Vol. 21. – 8159.
10. *Амосов О.С.* Оценивание состояния и параметров дробных динамических систем с использованием дробных фильтров калмановского типа /О.С. Амосов, С.Г. Амосова // Материалы XXXIII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова: МКПУ. – СПб: «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. – С. 96–99.
11. *Амосов О.С.* Дробные фильтры калмановского типа для оценивания состояния, параметров и порядка дробной динамической системы в задачах обработки навигационной информации /О.С. Амосов, С.Г. Амосова // Юбилейная XXX Санкт-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. – СПб: «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2021. – С. 325–328.
12. *Месарович М.* Общая теория систем: Математические основы. Пер. с англ. / М. Месарович, Я. Такахара. – М.: Мир, 1978. – 312 с.