DOI: 10.25728/mlsd.2023.0978

ЗАДАЧА ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВА ГРАФА ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Козлова О.В., Пашков Н.Н.
Российский Университет Транспорта (МИИТ)
olga.kozlova1998@yandex.ru, pashkovnn@gmail.com

Аннотация: в статье поставлена задача поиска минимального остова транспортной сети, построена математическая модель задачи, отличающаяся от стандартных моделей математического программирования дополнительными условиями. Приведены примеры решения.

Ключевые слова: транспортная сеть, граф транспортной сети, минимальный остов графа.

Введение

«Транспортная стратегия Российской Федерации до 2030 года с прогнозом на период до 2035 года» [1], предполагает создание сети мультимодальных транспортно-логистических комплексов (МТЛК) на территории Российской Федерации, связанных «Единой опорной транспортной сетью», в состав которой должны входить автомобильный, железнодорожный, воздушный, внутренний водный и морской транспорт. В Стратегии отмечается, что крупные МТЛЦ целесообразно размещать вблизи крупнейших точек потребления, производства или интеграции в мировую торговую систему.

В мировой практике проблема размещения мультимодальных центров решается различными способами [2]. При анализе действующих схем размещения и при проектировании новых транспортно-логистических цепей, широко используются математические модели задач оптимизации ресурсов и методы математического программирования [3]. В работе [4] сформулирована иерархическая модель задачи оптимального размещения центров методами математического программирования. Этот подход развивается в работе [5], в которой предлагается два этапа решения:

Поиск минимального остова графа транспортной сети

Поиск оптимального размещения МТЛК на минимальном остове сети

В настоящей работе приводятся результаты первого этапа решения иерархической задачи оптимального размещения МТЛК: поиск минимального остова графа транспортной сети.

1. Основная часть

Поставим в соответствие транспортной сети простой взвешенный связный граф $G(V,E)$ - без изолированных вершин, петель и кратных ребер: V – множество вершин (пунктов отправления и назначения), E – множество ребер (путей сообщения), соединяющих вершины. Каждому ребру (v_i, v_j) графа соответствует определенный вес c_{ij} (рис. 1). На этом графе требуется найти остовное дерево, сумма весов рёбер которого минимальна.

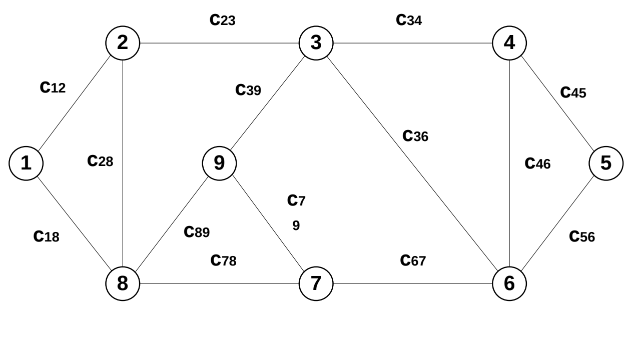

Рис. 1. Граф транспортной сети

Обозначим через x_{ij} бинарную переменную задачи: $x_{ij} = 1$, если ребро включается в минимальный остов графа, $x_{ij} = 0$, в противном случае. С учетом введенных обозначений, математическая модель задачи поиска минимального остова графа может быть представлена в следующем виде.

Требуется найти минимальное значение целевой функции F:

$$F = \min_{x} \sum_{i=1,j=1}^{m,n} c_{ij} x_{ij.}, \quad (1)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = m - 1,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};$$

где, F - целевая функция задачи

- x_{ij} – бинарная переменная задачи
- c_{ij} – вес ребра графа (расстояние)
- m – число вершин графа транспортной сети
- n – число ребер графа

Здесь: первое условие – остовное дерево должно содержать все m вершин графа; второе условие – остовное дерево должно содержать ровно $m - 1$ ребер; третье условие – бинарная переменная задачи x_{ij} принимает значение 0, если ребро не включается в остовное дерево, 1 – если включается.

Численные решения задач поиска минимального остова транспортной сети.

1. Пусть веса ребер графа транспортной сети заданы таблицей 1.

Таблица 1. Веса ребер графа транспортной сети (км)

Ребро		C_{12}	C_{18}	C_{23}	C_{28}	C_{34}	C_{36}	C_{39}	C_{45}	C_{46}	C_{56}	C_{67}	C_{78}	C_{79}	C_{89}
Вес ребра		9	8	11	5	7	12	12	12	2	12	4	7	10	8

Минимальный остов графа транспортной сети примера 1, суммарным весом ребер 54 км, найден с помощью приведенной выше модели задачи симплекс-методом [6], представлен на рисунке 2.

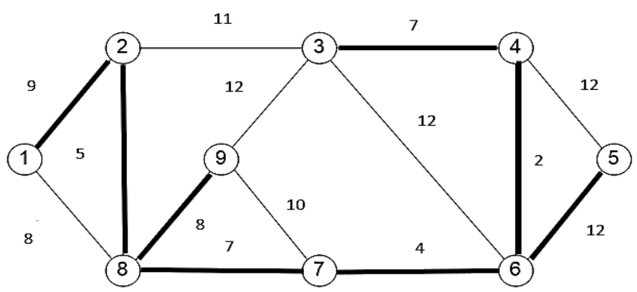

Рис. 2. Минимальный остов транспортной сети примера 1

2. Пусть веса ребер графа транспортной сети заданы таблицей 2.

Таблица 2. Веса ребер графа транспортной сети (км)

Ребро	C_{12}	C_{18}	C_{23}	C_{28}	C_{34}	C_{36}	C_{39}	C_{45}	C_{46}	C_{56}	C_{67}	C_{78}	C_{79}	C_{89}
Вес ребра	11	13	11	9	4	1	3	12	2	10	5	15	4	6

Минимальный остов графа транспортной сети примера 2, суммарным весом ребер 46 км, представлен на рисунке 3.

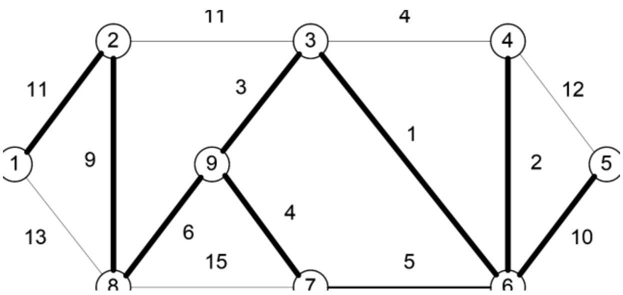

Рис. 3. Минимальный остов транспортной сети примера 2

2. Заключение

Таким образом, разработанная модель задачи поиска минимального остова графа транспортной сети, в отличие от известных комбинаторных алгоритмов, позволяет решать задачу алгебраическими методами с применением матричного аппарата, что принципиально важно для задач большой размерности исходных массивов данных.

Литература

1. Минтранс РФ. Официальный сайт. [Электронный ресурс] – URL: https://mintrans.gov.ru/documents/ 2/11577.
2. *Daskin M.* Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications / Mark S. Daskin. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. – 498 p.
3. *Карманов, В. Г.* Математическое программирование: Учеб. пособие. – 5-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
4. *Yury Kochetov*. Facility Location: Discrete Models and Local Search. [Электронный ресурс]. – URL: http://math.nsc.ru/LBRT/k5/Kochetov/Papers/Kochetov_ Facility%20Location.pdf.
5. *Козлова, О. В.* Задача размещения мультимодальных логистических центров / О. В. Козлова, Н. Н. Пашков // Цифровая трансформация транспорта: проблемы и перспективы: Материалы международной научно-практической конференции, Москва, 28 сентября 2022 года. – Москва: Российский университет транспорта, 2022. – С. 270-272. – EDN GICWOE.
6. *Пашков, Н.Н.* Транспортная логистика (линейное программирование). – Москва: Прометей, 2020. – 202 с.