DOI: 10.25728/mlsd.2023.0768

ИНТЕГРАЦИЯ ДЕНЕГ И ФИНАНСОВ В МОДЕЛЬ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ ЭРРОУ: РАСЧЁТЫ НА ПРИМЕРАХ КУСОЧНО-ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Кривошеев О.И.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

o-krivosheev@yandex.ru

Аннотация. В общефилософском смысле для решения задачи интеграции макро- и микроэкономики, требуется ввести деньги и финансы в модель Эрроу. Это невозможно без ввода волатильности (в качестве эндогенной переменной системы). Мы, моделируем волатильность совместно с вектором целевых финансовых рычагов для набора всех технологий, что приводит к равновесию Нэша не очень далеко от границы утраты устойчивости долгосрочного ценового равновесия, когда целевые финансовые рычаги оказываются индивидуальными "best-response" на обусловленные коллективным набором рычагов макроэкономические колебания. В теоретико-игровом аспекте это является прямым аналогом (частным случаем) трагедии общего ресурса - раздела перегружаемого общественного блага. В вычислительном же плане моделирование могло бы потребовать многосерийного расчета многомерных динамических траекторий, но данную алгоритмически и вычислительно непростую задачу удалось приближенно свести к системам (иногда явно разрешимых) статических тензорно-линейных уравнений.

Ключевые слова: кредитный рычаг, волатильность, модель общего равновесия. интеграция макро- и микроэкономики.

Введение

Интеграция макро- и микроэкономики, необходимость которой обусловлена отсутствием финансовых переменных в базовой математико-экономической модели Эрроу-Дебрё-Маккензи при фактическом использовании для управления экономикой денежно-финансовых переменных, назрела давно. Современное решение в форме "наживо" примотанного скотчем костыля в виде чужеродной для модели Эрроу феноменологической модели AD-AS(IS-LM) не может считаться сколько-нибудь удовлетворительным, хотя и заполнило "теоретический вакуум".

Очевидное и единственно возможное решение для описания финансовых переменных состоит в том, чтобы описать риски, обусловленные нестабильностью доходов активов, в том числе (в первую очередь) эндогенные.

Четко отметим, что в этот самый момент мы находимся на значимой точке ветвления теории: от того, как мы здесь определим пространство стратегий (инвесторов) зависят и переменные модели, в которые будут агрегированы факторы финансовой неопределённости. Чисто из необходимости построить минимальный иллюстративный пример мы здесь делаем выбор в пользу стратегии поддержания постоянного кредитного рычага (с приложением в виде удельно-постоянного безрискового резерва на случай банкротства). При переходе к чисто практическим задачам стратегии, как и структура информационных множеств, под которыми можно понимать участвующие в стратегиях агрегированные переменные, должны быть усложнены, но мы надеемся, что полученный нами качественный результат сохранит своё значение.

Перед переходом к конкретному примеру рассмотрим отвлеченно-механическую абстракцию, которая, именно в силу абстрактности, лучше иллюстрирует основные идеи, чем перегруженный техническими подробностями чисто формальный экономический пример. Представьте себе, что имеется некоторый контейнеровоз, палуба которого выкуплена или арендована на безусловной основе некоторыми рационально-устроенными бизнесменами по частям и каждый в своей части волен только по индивидуальному усмотрению нагрузить сколь угодно высокий штабель контейнеров. Если без нештатных ситуаций, то выигрыш такого рационального бизнесмена окажется пропорционален высоте штабеля (башни) контейнеров. "По правилам" штабель контейнеров летит в море, если вертикальная проекция центра масс этого штабеля в какой-то момент качки выходит за пределы основания данного штабеля. Т.к. при любой конечной амплитуде колебаний существует высота штабеля, гарантирующая банкротство - понимаемое как падение в океан, то оптимальный (и, просто, дающий положительную прибыль) штабель должен быть конечен. Важно, что коллективно безответственное поведение всего сообщества инвесторов при этом толкает центр масс загруженного корабля к центру остойчивости данного контейнеровоза, что при сближении этих центров резко усиливает малые затравочные колебания и останавливает рост высот стопок контейнеров, аналогом которых и является эффективная "длина" кредитного рычага.

Особенно важна теоретико-игровая математическая идея этой ситуации, состоящая в том, что резерв подъёма центра масс, он же запас устойчивости корабля, является ресурсом общего пула (т.е. не исключаемым из потребления конкурентным благом, перегружаемым ресурсом, РОП и т.д.). Опишем это в ещё более понятных терминах.

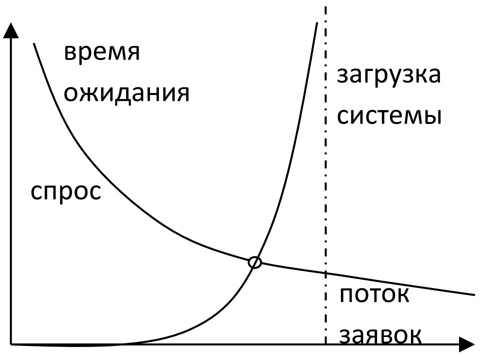

Рис. 1. Пример спойлерного "рынка" СМО - в роли "квази-цены" выступает время ожидания, в роли кривой предложения - связь пропускной способности и времени ожидания. В экономике по осям будет интегральный рычаг и волатильность

Пусть у нас есть мост, туннель или любая другая система массового обслуживания, работающая в режиме перегрузки. В таком случае, в дополнение к издержкам пользования незагруженной системой (как минимум) добавляется время стояния в пробке (в общем случае - ожидание в очереди), которое можно назвать квази-ценой (спойлерной ценой). Для экономики такой квази-ценой должная являться волатильность (определяемая несколько позже), для корабля - предельная амплитуда колебаний за рейс.

Уместно замечание. Типовой язык теории игр (и модели Эрроу, в частности) - язык целевых функционалов. В отдельных, частных случаях возможен перевод на язык цен - как в случае чисто частных благ, в теориях общественных благ (чистых, клубных или, как наши - перегружаемых), в общем случае, такой перевод не продуктивен. Тем не менее, как показывает пример систем массового обслуживания, часто легко объяснить снижение спроса на ресурс через действие конкретного фактора, напоминающего время ожидания в примере систем массового обслуживания. Этот фактор весьма похож на цену, но с важными отличиями- такая "квази-цена" не едина для всех как обычная цена частного блага, а индивидуальна для каждого плательщика, и, главное, она никак не служит трансформации издержек потребителя перегружаемого блага в стимулы любого его возможного производителя.

Чтобы "два раза не вставать" укажем также, что вышеперечисленные причины, хотя и являются причинами провала рынка в случае макроэкономической системы описанной технократической сказкой-"притчей" про контейнеровоз, но "вторичны и третичны" - главная причина - наличие того самого "нефизического" (или нематериального) ограничения, каковым является ограничение у(о)стойчивости для корабля и макроэкономической системы. Именно оно, работая как вовремя не снятый с младенца "корсет", не даёт выйти на границу потребительских возможностей, однако вопросы управления, напротив, во многом сводятся к преодолению указанных выше "вторичных и третичных" причин, до тех пор, пока мы не отказываемся - пусть даже частично - от рыночной экономики - не учреждаем частично "нерыночный контур". Это классическая ситуация трагедии общего ресурса по Хардину, когда благодаря индивидуально-рациональному потреблению происходит диссипация ренты. В данном случае это рента нефизического (или нематериального) "запаса устойчивости". Разумеется, кто-то самый умелый, всегда эту ренту может присвоить - в экономике, используя эксклюзивные возможности хеджирования рисков, связанные с масштабом банка, доступом к экстренному кредиту (печатному станку) и политическим весом, что, хоть и не является предметом нашего интереса, но отчасти может объяснять явление непропорционального роста доходов банков с начала XX века спровоцированного ростом волатильности, которую они породили и с которой научились эффективнее прочих бороться. Далее мы переходим к строго формальным вопросам и к данной общезначимой проблематике не возвращаемся.

1. Описание модели

Нам удобна модель в форме динамики трех переменных: долга, цены и капитала, над которыми надстроен блок вычисления риска и оптимизации целевого функционала инвестора. Прочие целевые функционалы считаются учтёнными в кривых текущего (не инвестиционного) спроса фирм и в функциях спроса простых конечных потребителей (для тривиальности никогда не занимающихся инвестициями).

Первичный целевой функционал инвестора - единственный целевой функционал, который нас интересует, определяется как ожидаемая функция мгновенной рентабельности для собственного капитала (не путать с капиталом физическим) - аналог "почти обезразмеренной" цены, которую удобно дисагрегировать на зависимость от пуассоновского (приближение модели) риска банкротства, кредитного рычага и теперь уже средней по времени рентабельности физического капитала. Результатом оптимизации целевого функционала является стратегия (однозначно определяемая парой безразмерных величин: целевой кредитный рычаг и целевая доля безрискового резерва). Подстановка набора таких стратегий, вычисленных для каждой технологии в уравнения трехсоставной общеэкономической динамической системы (цена, капитал, долг) в виде инвестиционного спроса и его влияния на капитал и финансовый рычаг (долг), позволяет вычислить статистику "провалов мгновенной рентабельности" по длинной траектории динамики системы и оценить риск банкротства.

Перед тем как описать эту модель, кратко обрисуем план её последовательного упрощения.

Упрощенная модель будет состоять в том, что мы рассмотрим предельный цикл. При этом нахождение системы на грани банкротства позволит замять для ясности как описание банкротства (с продажей основных фондов новым владельцам) так и вопрос о безрисковых резервах, которые формально окажутся нулевыми, что делает стратегии инвесторов ещё тривиальнее - конкретно, однопараметрическими.

Далее мы перейдем к линейной форме внешнего спроса и кусочно-линейной форме производственного предложения, что позволит использовать линеаризованную модель для счета амплитуды цикла. Это позволит получить точное решение в квази-однопродуктовом случае и заложить основу приближенного расчёта многопродуктовой модели - при том условии, что у нас существует эффективный способ её однопродуктового агрегирования для нужд расчёта периода общеэкономического коллективного провала рентабельности (или, если этот период может быть получен иным способом - например, из эксперимента).

Далее, несколько изменённая линеаризованная модель, переписываемая в форме пары векторно-билинейных уравнений (оба имеющих каждое своё трехмерное тензорное ядро) относительно - в критическом приближении - очищенных от времени кризиса провалов цен и кредитных рычагов, будучи аналитически разрешимой, позволяет (из некоторого дополнительного условия - условия одновременного отключения инвестиций при кризисе) найти кредитные рычаги (их сильно заниженную оценку) и пересчитать их в условиях более мягких - конечных по времени - шоков. Это мы можем считать модельным (демонстрационным) решением задачи ввода финансовых переменных в типовую микроэкономическую модель равновесия Эрроу для случая строго циклических колебаний экономических переменных, которое может быть улучшено или использовано для теоретических нужд. Сами колебания (особенно, их глубины и длины) как параметры волатильности становятся дополнительными новыми переменными, значения которых, наряду с рычагами актива составляют характеристики, преобразованного равновесия Эрроу, с эндогенно-определенными финансовыми переменными.

Чтобы не терять время, систему цена, долг, капитал мы запишем в почти обезразмеренном виде:

$$\begin{cases} d\vec{K}/dt = \mu K \\ d\ln\vec{l}/dt \cong \mu - li \\ d\vec{p}/dt = \Delta\vec{Q}(\vec{p},\vec{K},\Re,\vec{l},\vec{l}^{\,g}) \end{cases}, \tag{1}$$

где скорость роста основных фондов

$$\mu(l,l^g,i) = \begin{cases} -d, & l > l^g \quad or \quad i < -d/l \\ i\cdot l, & l = l^g \quad \& \quad i > -d/l \\ i\cdot l + \tau^{-1}(l^g - l), & l < l^g \quad \& \quad i \ge -d/l \end{cases}, \tag{2}$$

а произведения векторных величин $\vec{l}\vec{i}$ и $\vec{\mu}\vec{K}$ являются также векторами, полученными покомпонентным умножением, которое правильнее записать как $\vec{\mu}\vec{K}=[\vec{\mu}]\vec{K}$, где $[\vec{h}]$ - абстрактная квадратная диагональная матрица, диагональю которой является вектор, заключенный в соответствующие квадратные скобки $[..]$.

Обозначения: $\vec{K}$ - физический капитал, $\vec{\mu}$ - темп его роста, $\vec{i}$ - мгновенная рентабельность физического капитала, $\Delta\vec{Q}$ - вектор избыточного спроса (т.е. разности спроса и предложения), $\vec{p}$ - цена, $\Re$ - матрица компенсирующих инвестиционных перетоков (может быть для простоты исключена или положена равной единичной при пропорциональном росте всех отраслей экономики, когда имеется приблизительно равная доходность и, соответственно, межотраслевых перетоков нет). За устойчивость долгосрочного равновесия отвечает целевой финансовый рычаг - выступающий как параметр $\vec{l}^{\,g}$, который является "почти" двойником похожей динамической переменной $\vec{l}$ (фактический финансовый рычаг), в том смысле, что вне периода кризиса и небольшого пост-кризисного релаксационного интервала, когда резко взлетевший при кризисе (возможно, "вплотную" приблизившийся к бесконечности из-за почти совпадения долга и физического капитала) рычаг постепенно снижается до целевого значения, и затем точно с ним совпадает, пока кризис вновь "не разлучит их", уведя реальный кредитный рычаг вверх, и один из рабочих вариантов равновесия Нэша для предельного цикла как раз состоит в том, что оптимум кредитного рычага $l_h^{\,g}$ находится ровно при значении, при котором на пике проблем каждое $h-e$ предприятие четко зависает между жизнью и смертью: $\max l_h = +\infty$, но, в последний момент всё-таки успевает вернуться "к жизни". Финансовый рычаг определяется как отношение располагаемых средств к собственным. Мгновенная рентабельность вычисляется в предположении равенства цен создания фондов историческим ценам (с учетом выбытия), а доходность фиксируется на уровне, определенном текущими ценами. В том числе и поэтому, в систему необходимо добавить набор цен основных фондов p_K, но мы, чтобы не перегружать формулы, проговорим этот элемент лишь "на словах".

Ключевыми параметрами для дальнейшего и источниками параметров линеаризованных моделей будут ровно две функции $\vec{i}(p)$ (более точно, $\vec{i}(p,p_K)$) и $\Delta\vec{Q}(\vec{p},\vec{K},\Re,\vec{l},\vec{l}^{\,g})$ (точнее $\Delta\vec{Q}(\vec{p},\vec{p}_K\vec{K},\Re,\vec{l},\vec{l}^{\,g})$).

Второе уравнение в системе $d\ln\vec{l}/dt\cong\vec{\mu}-\vec{l}\vec{i}$ имеет несколько приближенный характер, в том смысле, что оно выведено в предположении неизменных цен создания основных фондов (что, вообще говоря, не верно), но мы в том же приближении можем пользоваться условием поддержания постоянного кредитного рычага в виде равенства $\vec{\mu}=[\vec{l}]\vec{i}$, на основании которого мы можем (даже в нескольких вариантах) сформировать функцию инвестиционного поведения, соответствующую цели поддержания, по возможности, постоянного кредитного рычага l на уровне l^g. Наиболее точный вариант функции инвестиционного поведения - (1а). Он описывает, что $\mu=li$ при нормальных условиях $l=l^g$ & $i>-d/l$, если $l<l^g$ & $i\geq -d/l$, то добавляем слагаемое отвечающее за доведение рычага до целевого за счет ускоренных инвестиций, но в модели постоянного целевого рычага (а не в случае когда таковой, в силу более сложных целевых ориентиров, все-таки меняется) такая ситуация не должна возникать (кроме как на начальном участке траектории). Наконец, самый важный случай $l>l^g$ *or* $i<-d/l$ - или рычаг больше целевого, тогда инвестиции равны нулю пока не будет восстановлено равенство $l=l^g$, или рентабельность настолько мала, что даже полное отключение инвестиций не способно сдержать целевой уровень рычага: $\mu\geq -d$ - это минимальный темп роста - в режиме естественного выбытия ("усыхания") фондов.

В принципе, здесь мы можем рискнуть обойтись двухкомпонентной моделью

$$\begin{cases}\beta\, d\vec{p}/dt = \overrightarrow{\Delta Q}(\vec{K},\vec{l}^{\,g},\vec{p})\\ d\vec{K}/(\vec{K}dt)=\vec{\mu}(\vec{i},\vec{l}^{\,g})\end{cases} \tag{3}$$

или

$$\begin{cases}\beta\, dp/dt = \Delta Q(K,l^g,p)\\ dK/(Kdt)=\mu(i,l^g)\end{cases} \tag{4}$$

в скалярном варианте далее,
где несколько упрощенная функция роста $\mu(l,i)$ может быть записана в однозначном варианте:

$$\mu(l,i)=\begin{cases}-d\ , & l>l^g \ \ or\ \ i<-d/l \\ i\cdot l, & l=l^g \ \ \& \ \ i>-d/l\end{cases} \tag{5}$$

В этой системе фаза кризиса будет короче, т.к. окажется "потерян" участок, на котором инвестиции уже возможны с точки зрения более тривиальной функции (5), но они невозможны в описывающей реальность исходной системе (1), т.к. в "настоящем мире" связанной со следованием правилу (2) мы должны дождаться, когда рычаг вернется на целевой уровень. На рисунке 2а) изображена ситуация в которой предложение на нижнем горизонтальном и вертикальном участке описываются чисто леонтьевской функцией, далее с момента $i>-d/l$ включаются инвестиции и растут линейно с ростом рентабельности до некоторого момента, пока стоимость продаж не достигает уровня предложения внешнего рынка, которое в нашей модели бесконечно, что дает инвертированную Z-образную кривую предложения, в которой обратно наклонённый участок зависит от l. В более сложной ситуации мы бы имели вариант ступеньку при $l>l^g$. На рисунке рис. 3а) изображена именно эта более сложная - двулистная ситуация.

На рис.2б) изображена упрощенная разность спроса и предложения (5), когда из линейного спроса вычитается вышеописанное Z-образное предложение (с опцией простой ступеньки при $l>l^g$). Более сложная и более правильная ситуация характерная для правильной двулистной функции $\mu(l,l^g,i)$ (1а), приведена на рисунке 3б).

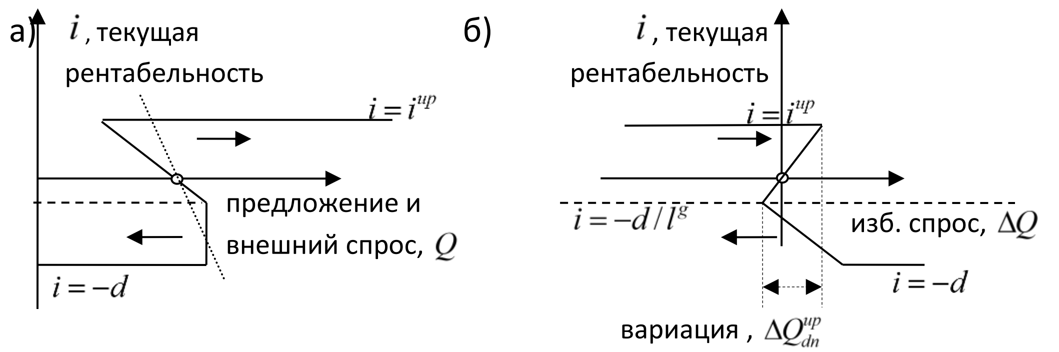

Рис. 2. а) упрощенный спрос и предложение, б) 1-листный избыточный спрос - ΔQ*. Значение для вычисления периода кризисного провала имеет вариация избыточного спроса* ΔQ^{up}_{dn}

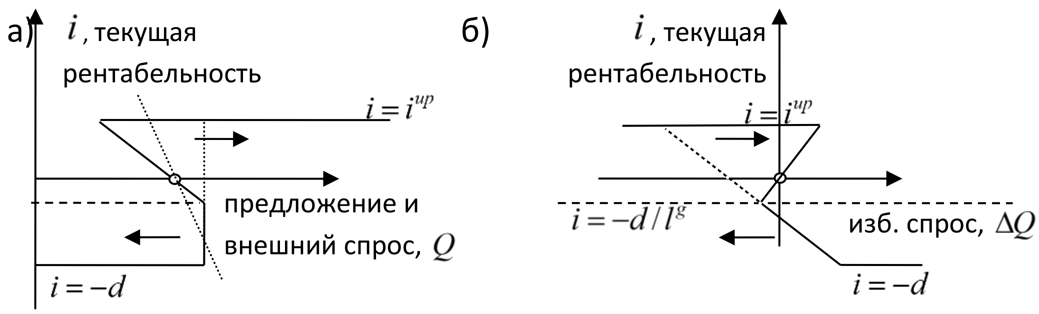

Рис. 3. а) общий - двулистный спрос и предложение, б) двулистный избыточный спрос - ΔQ

2. Расчет времени кризиса

На рисунке 2б) разность спроса и предложения в общем случае до трёх раз обращается в ноль, пересекаясь с осью ординат, что, потенциально, даёт три ценовых равновесия. Именно такой случай трех ценовых равновесий, изображенный на рисунке 2б) имеет место, когда при достаточно большом $l=l^g$ долгосрочное равновесие не устойчиво и система переходит либо в рост, либо в кризис, попеременно посещая верхнее и нижнее ценовые равновесия. Сверху, где рентабельности выше темпа роста экономики инвестиции (в отсутствии оттока капитала), превышают равновесный уровень, и мы имеем рост, приводящий к смещению разности спроса и предложения влево с исчезновением верхнего равновесия в процессе бифуркации типа складка, когда система переходит в кризис. далее в режиме свободного коллапса производственные фонды сжимаются с отрицательным ростом равным минус темпу выбытия

$$\mu = -d \tag{6}$$

Мы можем считать, что изменение фондов меняя внутренне предложение просто переносит долгосрочно-равновесную разность спроса и предложения $\Delta Q^{EQ}{}_{LT}$ пропорционально отклонению фондов ΔK вправо и влево

$$\begin{cases} \beta\, dp/dt \ = \Delta Q^{EQ}{}_{LT}(l^g, p) + \Delta Q_S(\Delta K) \\ dK/(Kdt) = \mu(i, l^g) \end{cases} \tag{7}$$

В основе расчёта длины кризиса лежит ключевая (приближенная) формула, связывающая вариацию выпуска (и, косвенно, производственных фондов) во времени и вариацию избыточного спроса между его локальным максимумом и минимумом в некоторый фиксированный момент времени (за который вполне естественно взять момент нахождения системы недалеко от долгосрочного равновесия по производственным фондам)

$$\Delta Q_S{}^{Max} = \Delta Q_{dn}^{up}, \tag{8}$$

где $\Delta Q_S{}^{Max}$ - вариация внутреннего предложения (выпуска) между крайними фазами предельного цикла, откуда получаем формулу (11) в силу очевидного

$$\Delta T = \frac{\Delta Q_S{}^{Max}}{dQ_S}, \tag{9}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta Q_{dn}^{up}}{dQ_S}, \tag{10}$$

где числитель $\Delta Q_{\Delta dn}^{\Delta up}$ - вариация между максимумом и минимумом (т.е. экстремальная вариация) есть, в силу системы - смещение спроса между крайней позицией больших и крайней позицией малых фондов, Q_S - равновесный объём выпуска.

Этот же период коллапса фондов рамках линейного участка вокруг долгосрочного равновесия можно попытаться (достаточно приближенно, в однопродуктовом приближении) представить как

$$\Delta T = \frac{\Delta p_{dn}^{up}}{dKk_p} \partial \Delta Q / \partial p, \tag{11}$$

где Δp_{dn}^{up} - максимальный размах изменения цен между фазами кризиса и роста или

$$\Delta T = \frac{\tilde{C} \Delta p_{dn}^{up}}{dKk_p}, \tag{12}$$

где $\tilde{C} = \partial \Delta Q / \partial p$ пока скалярный прообраз будущей матрицы линеаризации быстрой ценовой подсистемы. Важно, что при определении периода эта величина, выступающая в качестве прообраза главного собственного значения многомерной матрицы $C = \partial \Delta \vec{Q} / \partial \vec{p}$ - производной вектора избыточного спроса по вектору цен, находится в области неустойчивости, тогда как в рамках критической модели (пересчитываемой в реальную с помощью коэффициента k_T, $k_T = \left[\frac{1}{1 - e^{-d\Delta T}}\right]$, определяемого на основе периода ниже мы рассматриваем именно границу устойчивости, когда положительных собственных значений (а равно положительных действительных частей) вообще нет.

Векторная запись того же равенства (11) в предположении, что мы для расчёта продолжительности умеем решать задачу агрегирования нам не особо нужна, но может служить проверке качества выполнения условия одновременного выхода всех отраслей (точнее, технологий) из кризиса

$$\vec{\Delta T} = [d\vec{K}k_p]^{-1}\,\vec{\Delta p}^{up}_{dn}\,\partial\Delta\vec{Q}/\partial\vec{p}\,, \tag{13}$$

где запись $[d\vec{K}k_p]$ означает квадратную матрицу с компонентами вектора в скобках $dK_m k_p$ на диагонали, а $[d\vec{K}k_p]^{-1}$ - матрицу с обратными величинами на диагонали, или, по-простому обратную к предыдущей матрицу. записанные подряд векторные величины мы также считаем перемноженными в том же смысле: если и - вектора, то запись мы однозначно и универсально понимаем как покомпонентное произведение векторов $\vec{d}\vec{K}\vec{k}_p = [\vec{d}][\vec{k}_p]\vec{K}$ (соответственно, $[\vec{d}\vec{K}\vec{k}_p] = [\vec{d}][\vec{K}][\vec{k}_p]$ как квадратная матрица с $d_m K_m k_{p_m}$ на диагонали), и далее временами опускаем квадратные скобки исключительно для простоты чтения формул, а матрица $C = \partial\Delta\vec{Q}/\partial\vec{p}$ по-прежнему может (и даже должна) иметь неустойчивые собственные значения.

Глубина провала рентабельности

$$\Delta\vec{i} = J\,\vec{\Delta p}_{dn}\,, \tag{14}$$

где $J = \left(\dfrac{\partial\vec{i}}{\partial\vec{p}}\right)$ - матрица частных производных вектора текущих рентабельностей в окрестности цен долгосрочного равновесия.

В этот момент мы описали только половину модели. Вторая - важнейшая её часть модель поведения инвестора, дающая оптимальный рычаг

3. Модель оптимизации кредитного рычага

Общая модель оптимизации кредитного рычага нам не очень важна. Она многократно описана, например, в [1,2].

Из целевого функционала

$$i_C = (1-c)l(i-\lambda) - \lambda \ln c^{-1} \to Max \tag{15}$$

где максимум берется по паре l, c, где l - целевой кредитный рычаг, а $0 \le c \le 1$ - поддерживаемая доля безрисковых резервов, "расчехляемых" в случае банкротства (с восстановлением прежних пропорций безрискового резерва и инвестированного собственного капитала).

Не сложно понять, что для каждого провала рентабельности данной длины T и глубины Δi существует предельное соотношение производственных активов и собственного капитала, при котором ещё не наступает банкротство - см. формулу (15)

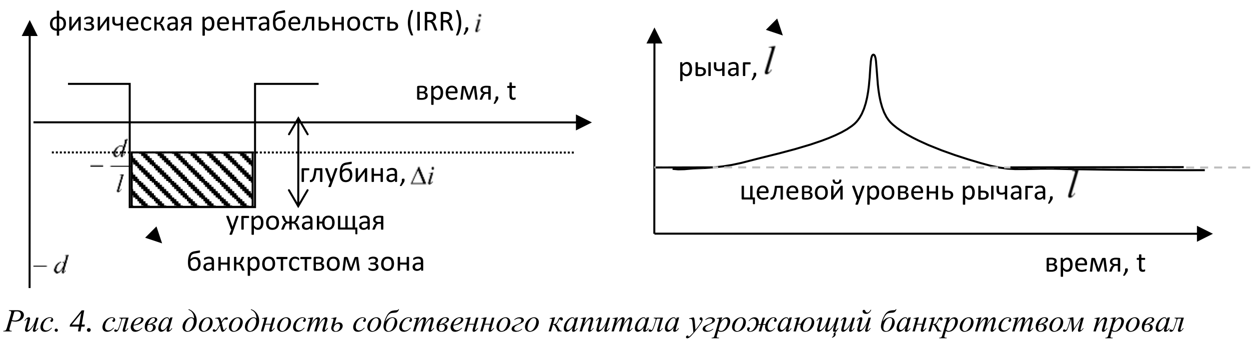

Рис. 4. слева доходность собственного капитала угрожающий банкротством провал рентабельности (штриховкой обозначена зона, приводящая к росту финансового рычага l), справа синхронный график всплеска финансового рычага, потенциально обращающегося в бесконечность в момент банкротства

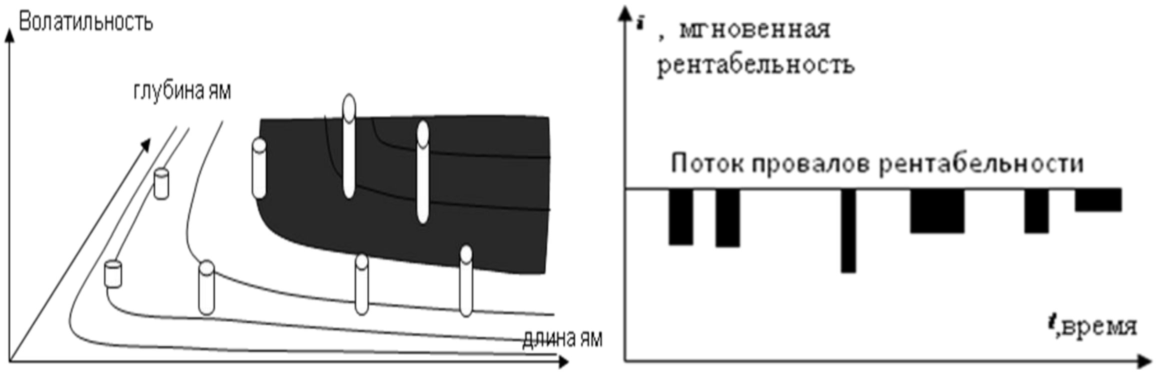

Рис. 5. а) Дискретное распределение пуассоновских интенсивностей, т.е. частот, шоков разной длины и глубины провала рентабельности. Данное распределение формируется на основе достаточно длинной траектории рентабельности типа 5б)

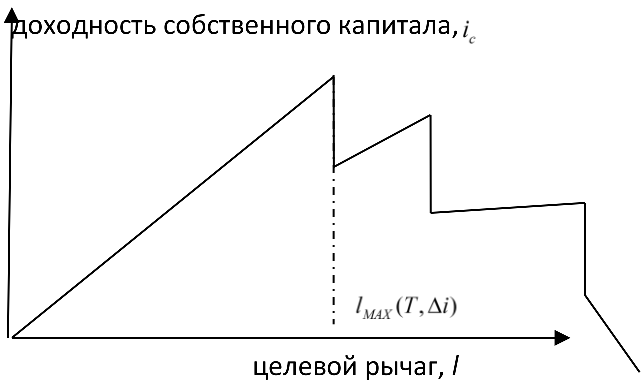

Рис. 6. Вид функционала рентабельности собственного капитала для случая много ступенчатой функции риска $\lambda\,(l)=\sum_m \Delta\lambda_m \theta(l-l_m)$

В общем случае траектория системы имеет сложный вид как на рисунке 5б), что приводит к нетривиальному распределению в пучке потока шоков (приближенно нами воспринимаемого как Пуассоновский) схематически изображенного многомодальным дискретным распределением интенсивностей элементарных Пуассоновских потоков рис.5а). Дискретное распределение на рисунке 5а) приводит к ступенчатой кривой зависимости риска от рычага актива $\lambda\,(l)=\sum_m \Delta\lambda_m \theta(l-l_m)$, порождающей вид целевого функционала типа рис.6, где целевой функционал (7) является предварительно оптимизированной (максимизированной) по $c: 0 \le c \le 1$ функцией одного аргумента.

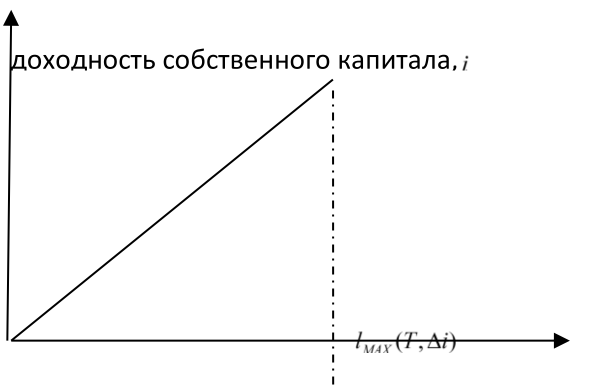

Рис. 7. Вид функционала рентабельности собственного капитала для одноступенчатого случая $\lambda\,(l)=\Delta\lambda_0 \theta(l-l_0)$

В случае простых колебаний всё довольно элементарно: распределение шоков - дельта-функция, функция зависимости риска от рычага $\lambda(l) = \lambda_0 \theta(l - l_M)$ - простая ступенька, такая, что риск на её верхней части превосходит рентабельность физического капитала (что исключает эту область параметров из внимания инвестора), шоки носят предельно однотипный характер, равновесный кредитный рычаг находится точно на границе наступления банкротства, целевой функционал (с учетом $\lambda = 0,\ c = 0$)

$$i_C = (1-c)l(i-\lambda) - \lambda \ln c^{-1} \tag{16}$$

переходит в тривиальный вид

$$i_C = li \to Max \tag{17}$$

при условии $\lambda = 0$ (нет банкротств) (и $i - \lambda < 0$ вне этой области значений $l > l_M$ как на рис.7.)

В этом случае, как не сложно посчитать решая систему

$$\begin{cases} dK/(Kdt) = -d \\ dD/dt = iKp_K \end{cases} \tag{18}$$

до момента банкротства T

$$s = Kp_K - D = 0 \tag{19}$$

когда собственный капитал s обратиться в ноль (того же результата можно добиться решая уравнение динамики рычага актива $d\ln\vec{l}/dt \cong \vec{\mu} - \vec{l}\,\vec{i}$ в виде $d\ln\vec{l}/dt \cong -d - \vec{l}(-d)$ или

$$d\ln l/dt \cong -d - li \tag{20}$$

до момента обострения $l = +\infty$), предельный (максимальный) рычаг актива, не приводящий к банкротству

$$l_{MAX}(T, \Delta i) \cong \frac{d}{\Delta i(1 - \exp^{-d\Delta T})}, \tag{21}$$

что соответствует максимальной величине целевого рычага, при которой предприятие переживает прямоугольный провал рентабельности с параметрами $(T, \Delta i)$.

Наша основная задача смоделировать направление вектора кредитных рычагов, для чего мы, зная примерный период провала ΔT из эксперимента или оценочно из (8), применим искусственный предельный переход при $H \to +\infty$

$$l_{MAX}(T, \Delta i) \cong \frac{d}{\Delta i(1 - \exp^{-d\Delta T \cdot H})}, \tag{22}$$

с надеждой потом используя (обратный) переход

$$\vec{l}^{\,*} = \vec{l}_C k_T, \tag{23}$$

$$k_T = \left[\frac{1}{1 - e^{-dT}}\right] \tag{24}$$

вернуться к "истинным" рычагам.

Итак, критический рычаг (H-модель) определяется (25)

$$l^C{}_{MAX}(T, \Delta i) \cong \frac{d}{\Delta i} \tag{25}$$

оно же переписывается в векторном виде как (26):

$$\vec{l}_c^{\,T} E_3 J \Delta\vec{p} = \vec{d}\ , \tag{26}$$

где E_3 - трехмерный - кубический - тензор с единичной диагональю размерности числа технологий по всем его трём осям.

Далее мы вводим понятие "квази-однопродуктовое" приближение. Это многопродуктовый случай, в котором все компоненты векторной цены меняются синфазно и синхронно, так что провалы рентабельности происходят одновременно на всех технологиях: т.е. некоррелированных и контр-циклических активов в реальном секторе нет.

В ситуации (рис. 7) условие (26) соответствует тому, что при синхронном провале цен все производители снижают инвестиционный спрос. Если кто-то исчерпал свою возможность его снижения раньше других, то падение цен (из-за изменения наклона оставшегося инвестиционного спроса) остановилось и эти последние могут увеличить свой рычаг. Равновесие достигается, когда так поступить не может никто и равенство (25) должно быть написано для всех как в (26). Значит

$$\begin{cases}(C_{00}+\vec{K}^T C_1+[\vec{l}_c]\vec{K}C_{11})\Delta\vec{p}=0\\ \vec{l}_c^{\,T}E_3 J\Delta\vec{p}=\vec{d}\end{cases} \qquad (27)$$

Таким образом в долгосрочном периоде финансы и волатильность в расширенной модели Эрроу пока что в критическом приближении определяет система двух неоднородных векторно-билинейных уравнений. В этой системе первое уравнение отвечающее за наличие в пространстве ценовых отклонений $\Delta\vec{p}$ вектора, соответствующего нулевому собственному значению, состоит из C_{00} независящей от капитала и рычага части матрицы устойчивости, C_1 - трехмерного тензора, порождающего квадратную матрицу $\vec{K}^T C_1$ и, самое принципиальное, из свертки покоординатного произведения пары векторов $\vec{K}$ и $\vec{l}_C$ и C_{11} - также как и C_1- трехмерного тензора с размерностью числа технологий по сворачиваемой с покоординатным произведением $\vec{l}_C$ и $\vec{K}$ координате и с размерностью вектора цен и отраслей, т.е. рынков, по оставшимся двум координатам. Во втором билинейно-векторном уравнении матрица J - прямоугольная и имеет размерность числа технологий по длинной стороне с размерностью числа цен, т.е. рынков, по короткой. Важно, что свертка происходит через кубический тензор с размерностью числа технологий по всем трём осям, таким образом в уравнении (26) $\vec{l}_c^{\,T}E_3 J\Delta\vec{p}=\vec{d}$ комплекс $\vec{l}_c^{\,T}E_3 J\Delta\vec{p}$ имеет размерность числа технологий (как и стоящий справа от него вектор темпов выбытий, компоненты которого впрочем не должны сильно различаться (для корректности нашего расчета), но это другая история).

В первом уравнении квадратная матрица $[\vec{l}_C]\vec{K}^T C_{11}$ и лежащий в её основе трехмерный (некубический) тензор C_{11} получаются при дифференцировании инвестиционного спроса. Для решения системы (26) нам в данном случае важно, что матрица C_{11} и матрица J крайне тесно связаны.

4. Математические аспекты

Общая

Чтобы проиллюстрировать эту связь сейчас на время абстрагируемся от любых коэффициентов и поймем, что инвестиционный спрос (спрос на факторы производства товаров для инвестиций)

$$Q^{DI}=Bp_K{}^{Eq}[K(li+d)][p_K]^{-1}, \qquad (28)$$

где B - матрица прямых инвестиционных затрат, здесь и далее, для определенности невырожденная квадратная, $p_K{}^{Eq}K$ - номинальная стоимость физического капитала, комплекс $p_K{}^{Eq}[K(li+d)]$ - объём номинальных, т.е. денежных инвестиций, $Q^{CI}=p_K{}^{Eq}[K(li+d)][p_K]^{-1}$ - объём конечных (готовых) инвестиционных товаров.

Нам крайне важно для аналитического решения (28) понимать, что при $p_K=const$ производная от $Q^{DI}\sim(li+d)[p_K]^{-1}$ величина порождала бы ровно одно слагаемое

$$\partial Q^{DI}/\partial p\sim\vec{l}\,\frac{\partial i}{\partial p}+\vec{l}\,[\vec{i}\,]=[\vec{l}\,]J+[i_C]=\vec{l}E_3 J+[i_C], \qquad (29)$$

которое, при дальнейшем умножении на $\Delta\vec{p}$, породило бы правую часть (26) $\vec{l}_c^{\,T}E_3 J\Delta\vec{p}$ (второго уравнения в (27)) $\vec{l}_c^{\,T}E_3 J\Delta\vec{p}=\vec{d}$, что мгновенно превратило бы эту систему двух векторно-билинейных уравнений в линейную, на же самом деле наличие текущей цены основных фондов в знаменателе порождает ещё одно слагаемое

$$\partial Q^{DI} / \partial p \sim \vec{l}\,\frac{\partial i}{\partial p} - \{\vec{l}\,[\vec{i}\,] + \vec{d}\}\frac{1}{p_K}\frac{\partial p_K}{\partial p} = [\vec{l}\,]J + [i_C] = \vec{l}\,E_3 J - (i_C E_2 + [\vec{d}\,])[p_K]^{-1} B$$

конкретно,

$$\partial Q^{DI} / \partial p \sim [l]\frac{\partial i}{\partial p}[p_K{}^{Eq}]^{-1} - (li + d)[p_K]^{2^{-1}} B^T \qquad (30)$$

а второе квадратную диагональную матрицу с константой – глобальная рентабельность собственного капитала в конкурентном секторе на диагонали,
где во втором выражении можем писать $i_C = li$

$$\partial Q^{DI} / \partial p \sim [l]\frac{\partial i}{\partial p}[p_K{}^{Eq}]^{-1} - (i_C + d)[p_K]^{2^{-1}} B^T \qquad (31)$$

или

$$\partial Q^{DI} / \partial p \sim lE_3 J[p_K{}^{Eq}]^{-1} - (i_C + d)[p_K]^{2^{-1}} B^T \qquad (32)$$

Итоговое выражение

$$C_{11} = \partial Q^{DI} / \partial p = Bp_K{}^{Eq}[\vec{K}]\left(lE_3 J[p_K{}^{Eq}]^{-1} - (i_C + d)[p_K]^{2^{-1}} B^T\right) \qquad (33)$$

При этом мы можем попытаться рассматривать не только конкурентный случай, но и в той или иной мере сектор фирм обладающих монополистической властью. Для этого можно сделать два шага: 1) разрешить доходности собственного капитала быть вектором, не говоря, что она - мировая константа, 2) без оговорок отказаться от сильно упрощающего предположения, что межсекторальных перетоков нет: в данном случае темпы роста определяться темпами роста смежных отраслей и будут, как правило значительно меньше темпов получения прибыли. В результате прибыль благополучно уйдет (для случая России) в мировую экономику.

Итого, опираясь на глубокую связь матрицы J и тензора C_{11} и, исходя из линейности технологий создания основных фондов $\vec{p}_K = B^T \vec{p}$ (при отсутствии для финальной простоты фондов для создания фондов), можно (существенно исходя из приведения доходности собственного капитала $i_C = li$ к универсальному по экономике (Миру в целом) уровню i_{C0}) получить следующие формулы:

$$\Delta\vec{p} = (B\ \ [K(i_C + d)][p_K{}^{Eq}]^{-1} B - C^{NoL})^{-1} B^T \left[\vec{K}\right]\vec{d}\ , \qquad (34)$$

где подразумевается, что основные компоненты предложения и спроса после дифференцирования по цене дали матрицы частных производных только одна из которых - матрица производных инвестиционного спроса

$$C^{DI} = C_{11} = B^T[K]([l]J - (li + d)][p_K{}^{Eq}]^{-1})B$$

(сразу переходит в $C_{11} = \partial Q^{DI} / \partial p = Bp_K{}^{Eq}[\vec{K}]\left(lE_3 J[p_K{}^{Eq}]^{-1} + (i_C + d)[p_K]^{2^{-1}} B^T\right)$) зависит от параметров финансовых стратегий, а остальные либо фиксированы, либо зависят только от вектора объёмов основного капитала (по технологиям) и все их можно объединить в матрицу

$$C^{NoL} = C^{IC}(K) + C^G + C^C + C^{NX} - C^S(K), \qquad (35)$$

где $C^{IC}(K), C^G, C^C, C^{NX}, C^S(K)$ - матричные производные внутреннего промежуточного спроса, государственного, конечного и внешнего спроса и (со знаком минус) внутреннего предложения. Они не зависят от рычага.

Подстановкой в $\vec{l}_c = \left[(J\Delta\vec{p})^{-1}\right]\vec{d}$ (из (27) получим конечный ответ:

$$\vec{l}_c = \left[J(B^T[K(i_C+d)][p_K{}^{Eq}]^{-1}B - C^{NoL})^{-1}B^T\left[\vec{K}\right]\vec{d}\right]^{-1}\vec{d}\,. \qquad (36)$$

При этом мы получили единственное решение, есть надежда, что оно соответствует главному собственному вектору (хотя мы и не можем доказать это во всех случаях).

В качестве примера Н-предела (или приближения) можно упомянуть точный расчёт критического равновесия для производственной функции Леонтьева: пусть A и B - квадратные матрицы прямых текущих и капитальных затрат. Можно рассчитать, что

$$J = \left(\frac{\partial \vec{i}}{\partial \vec{p}}\right) = [\vec{k}_p][\vec{p}_K{}^{Eq}]^{-1}(E-A)\,, \qquad (37)$$

где p_K - цена фондов ($\vec{p}_K = B\vec{p}$), $p_K{}^{Eq}$ - её равновесное значение, k_p - их количественная производительность. Можно показать, что матрица ёмкости распадается на сумму $C = C^{DI} + C^{IC} + C^S + C^{\Delta G} + C^C + C^{NX} \cong B^T[p_K{}^{Eq}{}^{-1}\vec{l}k_p\vec{K}](E-A) - B^T[\vec{p}_K]^{-2}B[\vec{p}_K{}^{Eq}\vec{K}(\vec{i}_C+d)] + C^{NoL}$, (38)
где первый компонент - матричная производная инвестиционного спроса по факторам

$$Q_{DI} = BQ_{SI}\,, \qquad (39)$$

где

$$Q_{SI} = \frac{p_K{}^{Eq}K(li+d)\theta(li+d)\theta(l^*-l)}{p_K} \qquad (40)$$

объём конечного инвестиционного спроса на инвестиционные товары, $\vec{p}_K$ - их текущая цена, на которую делятся денежные инвестиции, которые в числителе формулы (включая две θ-функции целиком происходящие из инвестиционного правила (2)). C^{NoL} - матрица производных остальных компонент (пара из них нулевые: $C^S = 0$ и $C^{IC} = 0$).

$$\vec{l}_c^{\,-1} = [\vec{d}]^{-1}\{[\vec{k}_p][p_K{}^{Eq}]^{-1}(E-\hat{A})\{B^T[\vec{p}_K{}^{Eq}]^{-2}B[p_K{}^{Eq}K(i_C+d)] - C^{NoL}\}^{-1}B^T[\vec{K}][\vec{d}]\} \qquad (41)$$

также потери в отсутствии риска банкротств λ - это плата за капитал в количестве $\vec{i} = i_C\vec{l}^{\,-1}$. В присутствии риска λ, его надлежит как минимум прибавить (а, точнее, ещё сперва учесть поправку на ненулевой резерв c, снижающий эффективный рычаг актива).

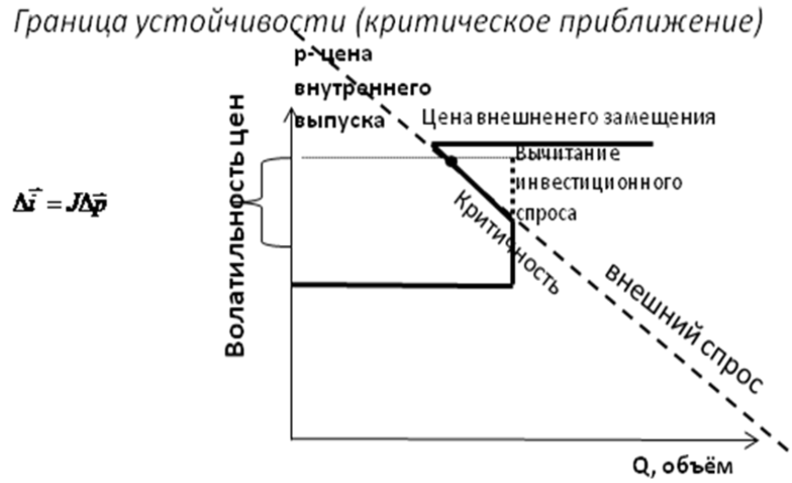

Рис. 8. Взаиморасположение кривых спроса и предложения для Н-модели

5. Открытая система

Отдельной темой является отклик на внешние возмущения.

$$\Delta\vec{p} = -C^{-1}(K,l)\vec{\xi} \qquad (42)$$

(нас, разумеется, интересуют только такие провалы цен, которые ведут к провалам внутренней рентабельности, которые мы также считаем попарно положительно коррелированными); верно, что

$$\Delta\vec{p} = \sum_k -\lambda_k^{-1}(l)\vec{\xi}_k = -(\vec{\xi}_1 \frac{1}{\lambda_1} + \vec{\xi}_2 \frac{1}{\lambda_2} + \vec{\xi}_3 \frac{1}{\lambda_3} + ...) \tag{43}$$

где λ_1, ..,λ_k отрицательные собственные значения (очевидно, $\Delta\vec{p}$ возрастает по модулю при стремлении старшего собственного значения к минус 0).

используя $\vec{l}_c^{\,*} E_3 J \cdot \Delta\vec{p} = \vec{d}$, после подстановки (25) получаем векторную систему нелинейных уравнений относительно финансового рычага $\vec{l}_C^{\,*}$:

$$\vec{l}_c^{\,*T} E_3 J\{-C^{-1}(\vec{l}_c^{\,*} k_T)\}\vec{\xi} = \vec{d} \tag{44}$$

или если, для дискуссии, представить себе, что направление первого собственного вектора и, соответственно, проекция $\vec{\xi}_1$ по какой-то причине однозначны при разных $\vec{l}_c$.

$$\vec{l}_c^{\,*T} E_3 J\{-\lambda_1^{-1}(\vec{l}_c^{\,*} k_T)\}\vec{\xi}_1 = \vec{d} \, , \tag{45}$$

Переход к реальным рычагам как обычно происходит через умножение k_T :

$$\vec{l}^{\,*} = \vec{l}_C k_T \, , \tag{46}$$

где ΔT - зависит от возмущения (шума) (для коротких относительно времени релаксации возмущений) или от периода релаксации при более длинном возмущении.

Заметим, что (в общем случае) для сложного потока неодинаковых шоков применить критерий единовременного отключения инвестиций не удастся.

6. Выводы

Наиболее нетривиальный результат работы - то, что мы органично объединили макро- и микроэкономическую теории на уровне базовой экономико-математической модели общего равновесия - нам требовалось ("просто") внести финансы в модель Эрроу, но это было невозможно сделать без внесения волатильности, как эндогенного фактора. Мы построили модель описывающую пару векторная волатильность (экономики в целом) - вектор финансовых стратегий (всех действующих экономике агентов производственного сектора) как пару двойственных переменных, т.е. находящихся в таком же отношении как цены и объёмы на обычных рынках частных благ с той, возможно, единственной разницей, что в нашем описании речь идет все-таки о квази-ценах, т.е. о "специфических ценах" а) не приводящих к трансферту ценности от потребителя к производителю и б) разных для разных потребителей. При этом мы показали конкретный способ перевести показатели эластичности в окрестности долгосрочного неустойчивого общего равновесия в показатели волатильности и финансовые рычаги, характеризующие отношение активов к собственному капиталу, ставшие полноценными компонентами общего равновесия.

Полученное равновесие неэффективно по Парето как в силу обычной трагедии общего ресурса (-Хардиновского равновесия), так и, главное, в силу того что ограничивающий функционирование экономики ресурс устойчивости вообще не является физическим - он проистекает из характера механизмов вложения и передачи финансов. Всё это как по отдельности, так и в сумме подвергает сомнению основной результат экономики благосостояния верный для неисправленной нами стандартной модели К.Эрроу, который позволял надеяться на достижение любого нужного Парето-оптимального распределения (при соблюдении условий 1-й и 2-й теорем К.Эрроу).

Литература

1. *Krivosheev., Oleg.* Real Market Volatility Equilibrium Model Based On Spoiler Equilibrium Concept, 2020 13th International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD)*, Moscow, Russia, 2020, P.1-5, doi: 10.1109/MLSD49919.2020.9247740*
2. *Krivosheev, Oleg.* Linearized Model of Volatile Equilibrium in Real Economics, 2022 15th International Conference Management of large-scale system development (MLSD*), 2022, P.1-5, doi: 10.1109/MLSD55143.2022.9934747.*

3. *Krivosheev, Oleg.* Log-Periodic Power Law Autonomous Stock Market Model. *P.1-5. DOI 10.1109/MLSD.2019.8911010 /Proceedings of the 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). Moscow: IEEE, 2019. https://ieeexplore.ieee.org/document/8911010.*
4. *Кривошеев* (2015) *О.И.* Поиск оптимального кредитного рычага в условиях максимизации ожидаемой скорости роста стоимости портфеля. М.: ПроблемыуправленияВып.6 за 2015г. – С.35-45.
5. *Geanakoplos J*. “Liquidity, Default, and Crashes: Endogenous Contracts in General Equilibrium.” In Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Eighth World Conference,Vol. 2, P.170-205. Econometric Society Monographs.
6. *Geanakoplos J*. “The Leverage Cycle.” In NBER Macroeconomics Annual 2009, ed. Daron Acemoglu, Kenneth Rogoff, and Michael Woodford, P.1-65. Chicago: University of Chicago Press.