DOI: 10.25728/mlsd.2023.0741

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АКТИВАМИ И ПАССИВАМИ БАНКА В УСЛОВИЯХ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ ОГРАНИЧЕНИЙ[1]

Жукова А.А., Флёрова А.Ю.
Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук", Москва, Россия
sasha.mymail @gmail.com, a.flerova@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена изучению оптимального поведение банка, который может управлять привлечением кредитов и депозитов, и работа которого регулируется внутренними и внешними ограничениями. Математическая модель банка представлена в виде задачи оптимального управления.

Ключевые слова: математическая модель банка, оптимальное управление.

Введение

В последнее время мировая экономика столкнулась с некоторыми трудностями в банковской сфере из-за банкротства ряда крупных банков. С целью изучения поведения участников данного рынка, оценки эффективности законодательных мер в этой сфере, а также исследования возможностей применения методов оптимального управления рассмотрим общую математическую модель банка, управляющего активами и пассивами с помощью процентных ставок по кредитам и депозитам. Общие принципы построения банковской модели основаны на работах [1]-[2].

Рассмотрим работу банка, деятельность которого сводится к выдаче кредитов и приёму депозитов. Предположим, что рассматриваемый банк может управлять привлечением новых кредитов и депозитов, выбирая процентные ставки по кредитам и по депозитам. Банк максимизирует полезность дивидендного дохода своих собственников (благосостояние собственников). Изменение ликвидных активов банка происходит за счет выдачи новых кредитов, получения банком процентов по кредитам и самих кредитов, динамики объема обязательных резервов банка, получения новых депозитов, выплаты процентов по депозитам и возврата депозитов, операционных и прочих расходов и выплаты дивидендов. Предположим, что потоки вновь создаваемых депозитов и вновь выдаваемых кредитов определяются спросом на депозиты в зависимости от процентной ставки.

Также необходимо учитывать ограничения банковской деятельности. Под внешними ограничениями мы понимаем ограничения, которые устанавливаются законодательством для регулирования деятельности банков: ограничение ликвидности банка и норматива достаточности капитала, устанавливающего определенное соотношение между капиталом и активами банка с учетом рисков этих активов. Есть и внутренние ограничения на работу банков: у банковских менеджеров может быть план на время. Это может быть как увеличение выплат собственникам, так и увеличение собственного капитала банка, в зависимости от поставленной цели.

1. Задача управления активами и пассивами банка

Мы рассматриваем поведение банка, который может заниматься следующими видами деятельности: принимать депозиты, выдавать кредиты и выплачивать дивиденды собственникам (акционерам). В сфере банковских услуг представлен широкий спектр подобных продуктов, так кредиты могут быть потребительские, ипотечные, кредиты для юридических лиц и т.д. Аналогично с депозитами. Для упрощения модели в этом случае будем рассматривать только один совокупный вид кредитов и один вид депозитов. Баланс банка уравнивает активы и пассивы. В качестве активов мы рассматриваем следующие виды задолженности перед банком: кредиты без спецификации, банковские резервы в Центробанке. В качестве пассивов (обязательств) банка будем рассматривать задолженность банка перед вкладчиками - все депозиты.

1.1. Активы и пассивы

Поток вновь выданных кредитов $K(t) \geq 0$ и погашение долга по ставке $\beta_l(t)$ определяет динамику текущей задолженности заемщика $L(t)$ перед банком.

[1] *Исследование Александры Жуковой выполнено при поддержке гранта РНФ № 22-21-00746 «Модели, методы и программные средства для поддержки моделирования социально-экономических процессов с возможностью прогнозирования и сценарных расчетов».*

$$\frac{d}{dt}L(t) = K(t) - \beta_l(t)L(t). \tag{1}$$

Предположим, что $K(t)$ определяется спросом на кредит как функцию процентной ставки по кредитам r_l, выберем следующую зависимость:

$$K(t) = \big(\alpha_l - \gamma_l r_l(t)\big)L(t). \tag{2}$$

где α_l, γ_l — некоторые положительные константы. Тогда

$$\frac{d}{dt}L(t) = \big(\alpha_l - \gamma_l r_l(t) - \beta_l(t)\big)L(t), \tag{3}$$

Часть средств банки резервируют, т.е. размещают в Центробанке. Поток новых резервов $K_c(t)$ определяет динамику текущего объема банковских резервов в ЦБ $R_c(t)$

$$\frac{d}{dt}R_c(t) = K_c(t). \tag{4}$$

Обязательства банка состоят из депозитов. В данном случае мы также включаем сюда расчетные счета. Приток вновь созданных депозитов $V(t) \geq 0$ и изъятий с депозитов в размере $\beta_s(t)$ определяет динамику текущей задолженности банка $S(t)$ перед домашними хозяйствами (депозиты)

$$\frac{d}{dt}S(t) = V(t) - \beta_s(t)S(t). \tag{5}$$

Предположим, что приток депозитов $V(t)$ определяется спросом на депозиты как функция процентной ставки по депозитам $r_s(t)$. И рассмотрим эту функцию в следующем виде: $V(t) = \big(\alpha_s + \gamma_s r_s(t)\big)S(t)$, тогда

$$\frac{d}{dt}S(t) = \big(\alpha_s + \gamma_s r_s(t) - \beta_s(t)\big)S(t). \tag{6}$$

Стоимость банковских услуг обозначим через $C(t)$. Ликвидные активы банка $A(t)$ изменяются за счет выдачи новых кредитов, получения банком процентов по кредитам и самих кредитов, динамики объема резервов банка в ЦБ, поступления новых депозитов, выплаты проценты по вкладам и возврат вкладов банком, операционных и других расходов банка и выплаты дивидендов.

$$\frac{d}{dt}A(t) = -K(t) + \big(r_l(t) + \beta_l(t)\big)L(t) - K_c(t) + V(t) - \big(r_s(t) + \beta_s(t)\big)S(t) - C(t) - Z(t). \tag{7}$$

В ходе данного исследования будем считать операционные и прочие расходы банка постоянными: $C(t) = C = const$.

1.2. Внутренние и внешние ограничения

Банковская деятельность регулируется законодательством. Законодательное регулирование направлено на защиту интересов вкладчиков банков, предотвращение финансовых пирамид, ограничение выдачи рискованных кредитов.

Часть $n_s(t)$ депозитов клиентов банка должна быть зарезервирована согласно требованиям Центробанка. Коэффициент $n_s(t)$ меняется со временем очень медленно, только когда ЦБ пересматривает нормативы.

$$R_c(t) \geq n_s(t)S(t). \tag{8}$$

Мы можем рассматривать это неравенство как равенство, потому что у банка нет стимула держать избыточные резервы. Тогда

$$R_c(t) = n_s(t)S(t). \tag{9}$$

Согласно (4) и (5) получаем

$$\frac{d}{dt}R_c(t) = K_c(t) = S(t)\left(\frac{d}{dt}n_s(t) - n_s(t)\beta_s(t)\right) + V(t). \tag{10}$$

Для упрощения будем считать $n_s(t) = n_s = const$. Тогда

$$\frac{d}{dt}R_c(t) = K_c(t) = S(t)\big(\alpha_s + \gamma_s r_s(t) - n_s\beta_s(t)\big). \qquad (11)$$

Тогда уравнение динамики ликвидных активов банка (7) примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}A(t) = -C_O - Z(t) + \big((\gamma_l + 1)r_l(t) + \beta_l(t) - \alpha_l\big)L(t) +$$
$$+\big((-1 + (1 - n_s)\gamma_s)r_s(t) + (1 - n_s)(\alpha_s - \beta_s)\big)S(t). \qquad (12)$$

Ограничение ликвидности банка. В случае крайней необходимости часть средств банка должна быть доступна банку для операций. Доля свободных средств определяется параметрами τ:

$$A(t) \geq \tau_s S(t) + \tau_l L(t).$$

Коэффициент достаточности капитала. В целях ограничения экономически опасной деятельности банков, в частности выдачи необоснованных кредитов, банковским законодательством устанавливается норматив достаточности капитала. Он определяет соотношение между капиталом и активами банка, взвешенных с весом w_l, определяемыми рисками конкретных активов:

$$\frac{L(t) + A(t) + S(t)(n_s(t) - 1)}{A(t) + w_l L(t)} \geq k_A. \qquad (13)$$

Оценку в нормативе достаточности капитала обозначим через k_A и в настоящее время значение $k_A = 0{,}08$.

Условия прироста капитала. Обратим внимание на следующий важный вопрос: как банк рассматривает окончание планового периода? Один из возможных ответов на этот вопрос, как и в общем случае классических задач теории экономического роста: окончание планового периода рассматривается как «конец света», после которого банк прекращает свою деятельность и уже не заботится о своей репутации, поэтому к моменту T банк выплачивает все возможные собственные средства (включая средства вкладчиков) в виде дивидендов собственникам. В этом случае деятельность банка представляет собой финансовую пирамиду. В данной работе рассматривается более интересный случай, когда после окончания периода плановой деятельности банка банк должен иметь возможность продолжать свою работу и, более того, развиваться. Представьте, что владельцы банка нанимают менеджера на определенный период времени. Перед ним стоит задача спланировать деятельность банка таким образом, чтобы максимизировать доходы собственников, не нарушая при этом обязательств перед клиентами банка и закона, а к концу периода своей работы увеличить собственный капитал банка. Банк планирует свою деятельность на определенный период, и к концу периода прирост капитала должен быть не менее η.

$$\eta\Big(A(0) + L(0) - \big(1 - n_s(t)\big)S(0)\Big) \leq A(T) + L(T) - \big(1 - n_s(t)\big)S(T). \qquad (14)$$

Ограничения на управления. Управляющими параметрами в нашей модели являются ставка по кредиту, ставка по депозиту и подлежащие выплате дивиденды. Обычно максимальная дневная процентная ставка по потребительским кредитам ограничена на законодательном уровне. Поэтому в нашей модели мы предполагаем $0 \leq r_l(t) \leq R_l$, где $R_l = const > 0$.

А процентная ставка по депозитам, во избежание арбитража, не может быть выше ставки по кредиту. Предположим, что это ограничение имеет вид $0 \leq r_s(t) \leq R_s$, где $R_s = const > 0$.

Для того чтобы множество управлений было компактным, введем ограничения на размер выплачиваемых дивидендов: $0 \leq Z(t) \leq M$, где M — большое положительное число.

1.3. Задача банка

Таким образом, переменными состояния банка являются кредиты $L(t)$, депозиты $S(t)$, ликвидность $A(t)$. Но заметим, что управляемая система записывается проще и с ней легче работать, если ввести следующую переменную $W(t) = A(t) + L(t) - (1 - n_s)S(t)$ вместо $A(t)$. Экономический смысл новой переменной $W(t)$ — собственные средства банка. В силу уравнения (12) дифференциальное уравнение для $W(t)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}W(t) = -C - Z(t) + L(t)r_l(t) - S(t)r_s(t). \qquad (15)$$

Предполагается, что начальные значения этих переменных заданы: $S(0) = S_0$, $A(0) = A_0$, $L(0) = L_0$ и $W(0) = A_0 + L_0 - (1 - n_s)S_0 = W_0$.

Банк планирует свою деятельность на период времени $[0, T]$, где T — фиксированный момент окончания рассматриваемого периода. А задача банка - максимизировать полезность от дивидендного дохода его владельцев (благосостояние собственников) $\int_0^T \left(Z(t)\right)^{1-\rho} e^{-\delta t}\, dt \to max$ путем выбора величины дивидендов $Z(t)$. Здесь ρ — коэффициент функции полезности и δ — коэффициент дисконтирования.

Заметим, что пока наша модель линейна по управляющим параметрам $r_s(t)$, $r_l(t)$. Это может привести к тому, что управления будут принимать значения с концов отрезков при применении принципа максимума Понтрягина (из условия максимизации функции Гамильтона - Понтрягина). Чтобы этого избежать и иметь возможность ограничить слишком большой диапазон ставок, добавим в функционал еще два слагаемых: $-\epsilon_2 r_l^2(t)$ и $-\epsilon_1 r_s^2(t)$, где ϵ_1 и ϵ_2 — малые положительные константы.

Таким образом, получаем следующую модель управления активами и пассивами банка, сформулированную в виде задачи оптимального управления с ограничением на фазовую траекторию. Задача с ограничениями на фазовую траекторию представляет собой достаточно сложный класс задач. Попробуем упростить эту задачу, чтобы облегчить процесс ее решения. Заменим фазовые ограничения штрафными функциями. Нарушение шарфа приводит к уменьшению значения максимизируемого функционала. Задача примет следующий вид:

$$\int_0^T \Big(\left(Z(t)\right)^{1-\rho} \mathrm{e}^{-\delta t} - \epsilon_1 \left(r_l(t)\right)^2 - \epsilon_2 \left(r_s(t)\right)^2 - 1/2\sigma_1 \left(max\left(0, k_A S(t)(1 - n_s) + k_A(w_l - 1)L(t) + (k_A - 1)W(t)\right)\right)^2 - 1/2\sigma_1 \left(max\left(0, S(t)(-1 + n_s + \tau_s) + L(t)(\tau_l + 1) - W(t)\right)\right)^2 \Big) dt \to max$$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt} S(t) = S(t)(\gamma_s r_s(t) + \alpha_s - \beta_s), \\
\frac{d}{dt} L(t) = -L(t)(\gamma_l r_l(t) - \alpha_l + \beta_l), \\
\frac{d}{dt} W(t) = -C - Z(t) + L(t) r_l(t) - S(t) r_s(t), \\
0 \le r_l(t) \le R_l, 0 \le r_s(t) \le R_s,\ 0 \le Z(t) \le M, \\
\eta W(0) = W(T), \quad L(0) = L_0, \quad S(0) = S_0, \quad W(0) = W_0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Терминальное ограничение $\eta W(0) \le W(T)$ в этой задаче можно заменить равенством $\eta W(0) = W(T)$, т.к. наличие к концу рассматриваемого периода планирования деятельности банка профицита собственных средств выполнение строгого неравенства $\eta W(0) > W(T)$, означает неэффективность управления, поскольку этот излишек можно было выплатить в виде дивидендов, тем самым увеличив значение функционала.

2. Условия оптимальности

Данная задача оптимального управления (16) имеет решение [3]. Для решения этой задачи используются условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина (напр., [4]).

Функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (16) имеет вид:

$$\begin{gathered}
H(\lambda_0, t, x, p, u) = \lambda_0((Z(t))^{1-\rho} e^{-\delta t} - \epsilon_1 \left(r_l(t)\right)^2 - \epsilon_2 \left(r_s(t)\right)^2 - 1/2\sigma_1 (max\ (\ 0, (k_A S(t)(1 - n_s) + \\
+ k_A(w_l - 1)L(t) + (k_A - 1)W(t))^2 - 1/2\sigma_2(\max\ (\ 0, S(t)(-1 + n_s + \tau_s) + L(t)(\tau_l + 1) - W(t))^2) + \\
+ p_1(t)\left(S(t)\gamma_s r_s(t) + (\alpha_s - \beta_s)S(t)\right) + p_2(t)\left(-L(t)\gamma_l r_l(t) + (\alpha_l - \beta_l)L(t)\right) + \\
+ p_3(t)\left(-S(t) r_s(t) + L(t) r_l(t) - Z(t)\right).
\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь число $\lambda_0 > 0$ и вектор-функция $p(t) \in R^3$являются множителями Лагранжа. Запишем сопряженную систему для нахождения сопряженных переменных $p(t)$.

$\dot{p_1}(t) = -p_1(t)(\alpha_s + \gamma_s r_s(t) - \beta_s) + p_3(t) r_s(t) - \ \lambda_0(\sigma_2(max\ (\ 0, S(t)(-1 + n_s + \tau_s) + L(t)(\tau_l + 1) -$

$$-W(t)))\,(1-n_s-\tau_s)+\sigma_1(\,max\,(\,0,(k_A S(t)(1-n_s)+$$
$$+k_A(w_l-1)L(t)+(k_A-1)W(t))k_A(1-n_s)), \tag{18}$$

$$\dot{p}_2\,(t)=-p_2(t)(\alpha_l-\gamma_l r_l(t)-\beta_l)-p_3(t)r_l(t)+\lambda_0(\sigma_2\,(\max(0,S(t)(-1+n_s+\tau_s)+$$
$$+L(t)(\tau_l+1)-W(t)))(1+\tau_l)+\sigma_1\,(\max(0,(k_A S(t)(1-n_s)+$$
$$+k_A(w_l-1)L(t)+(k_A-1)W(t))k_A(w_l-1)), \tag{19}$$

$$\dot{p}_3\,(t)=\lambda_0(-\sigma_2\,(max(0,S(t)(-1+n_s+\tau_s)+L(t)(\tau_l+1)-W(t)))-$$
$$-\sigma_1\,(\max(0,(k_A S(t)(1-n_s)+k_A(w_l-1)L(t)+(k_A-1)W(t))(1-k_A)). \tag{20}$$

Условия трансверсальности: $p_1(T)=0,\ p_2(T)=0$. Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление максимизирует функцию Гамильтона-Понтрягина и, соответственно, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} r_s(t)&=max\left(0,min\left(R_s,\frac{p_1(t)S(t)\gamma_s-p_3(t)S(t)}{2\lambda_0\epsilon_1}\right)\right),\\ r_l(t)&=max\left(0,min\left(R_l,\frac{-p_2(t)L(t)\gamma_l+p_3(t)L(t)}{2\lambda_0\epsilon_2}\right)\right),\\ Z(t)&=max\left(0,min\left(M,\left(\frac{p_3(t)}{\lambda_0(1-\rho)}\right)^{-1/\rho}e^{-\delta t/\rho}\right)\right). \end{aligned} \tag{21}$$

2.1. Подход к численному анализу условий оптимальности

Достаточно легко проверить, что тривиальное решение получается при нулевом значении параметра $\lambda_0=0$. Поэтому ставим $\lambda_0=1$. Из задачи (16) и сопряженной системы (18)-(20) получаем систему дифференциальных уравнений относительно переменных $S(t)$, $L(t)$, $W(t)$, $p1(t)$, $p2(t)$, $p3(t)$ с начальными условиями $L(0)=L_0$, $S(0)=S_0$, $W(0)=W_0$ и конечными условиями $W(T)=\eta W_0$, $p_1(T)=0$, $p_2(T)=0$. Все эти переменные зависят от управления (23), полученного из условий оптимальности. Аналитическое решение такой системы не видится возможным, поэтому перейдем к численным расчетам методом стрельбы.

Варьируем начальные значения переменных $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$ так, чтобы найти траекторию, которая приходит к конечным значениям $W(T)=\eta W_0,\ p_1(T)=0,\ \mathrm{p}_2(\mathrm{T})=0$.

При расчетах под точностью будем понимать параметр проверки найденной траектории как сумму квадратов отклонений от конечных значений $D=p_1^{calc}(T)^2+p_2^{calc}(T)^2+\left(W^{calc}(T)-\eta w(0)\right)^2$, где $p_1^{calc},p_2^{calc}(T)$ и $W^{calc}(T)$ — значения рассчитанной траектории в конце периода.

3. Результаты расчетов

Давайте посмотрим, как именно внутренние ограничения влияют на оптимальное поведение банка. Представим, что менеджмент банка получил задание увеличить собственные средства банка на 10% к концу заданного периода. Для примера принимаем следующие исходные данные: $L_0=5$, $S_0=2$, $W_0=7$, $k_a=0.08$, $T=5$, $M=20$, $R_s=2$, $R_l=2$, $n_s=0.09$, $\rho=0.5$, $C=0.3$, $\delta=0.1$, $\alpha_l=0.1$, $\gamma_l=0.2$, $\beta_l=0.1$, $\alpha_s=0.1$, $\gamma_s=0.2$, $\beta_s=0.1$, $\tau_s=0.03$, $\tau_l=0.01$, $\epsilon_1=0.1$, $\epsilon_2=0.1$, $\eta=1.1$, $w_l=1.2$. Найденная оптимальная траектория показана на рис. 1. Для этого случая оптимальная траектория находится с точностью $D=1.805\cdot10^{-5}$.

Если у руководства банка нет цели увеличения собственного капитала, то это равносильно тому, что $\eta=0$, при этом собственный капитал банка не становится отрицательным и в конце периода отсутствие дополнительных средств, которые могли бы быть выплачены в качестве дивидендов. Оптимальные траектории для этого случая показаны на рис. 2, а оптимальное управление – на рис. 3.

5. Заключение

Это исследование является примером того, как численные методы и принцип оптимальности могут быть объединены для изучения математической модели поведения банка. В этой модели внешние ограничения работы банка представлены как штрафные функции, а внутренние ограничения как некоторый целевой показатель работы менеджмента банка.

Важно понимать, какая именно цель ставится перед управляющими собственниками банка. Изучены оптимальные траектории кредитов и депозитов для различных управленческих случаев. Таким образом, в случае, когда цель банка - максимальная выплата дивидендов собственникам, банк оказывается в состоянии отсутствия собственных средств к концу рассматриваемого периода. В работе построены оптимальные траектории, характеризующие оптимальную работу банка в условиях ограниченности собственных средств.

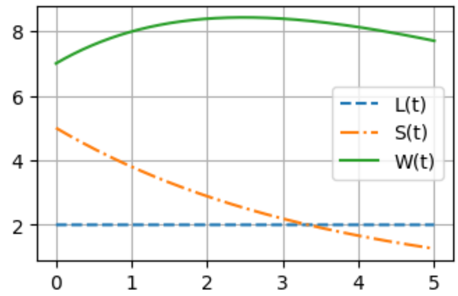

Рис. 1. Оптимальные траектории при условии роста 10%

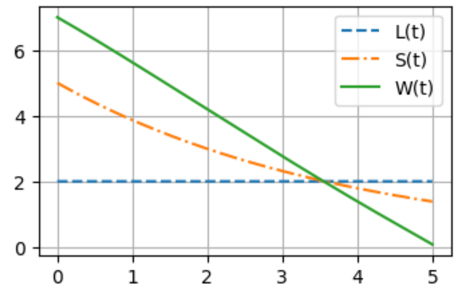

Рис. 2. Оптимальные траектории при отсутствии роста

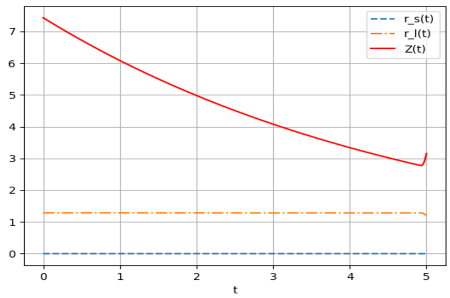

Рис. 3. Оптимальное управление при отсутствии роста

Литература

1. *Пильник Н.П., Радионов С.А., Языков А.А.* Модель оптимального поведения современной российской банковской системы // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2018. – Т. 22. – №. 3. – С. 418-447.
2. *Shananin A.A.* Mathematical modeling of investments in an imperfect capital market // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2021. – Т. 313. – С. S175-S184.
3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
4. *Бекларян Л.А., Флёрова А.Ю., Жукова А.А.* Методы оптимального управления: Учебное пособие. – М.: ЛЕНАНД, 2023. – 208 с.