DOI: 10.25728/mlsd.2023.0714

ПОВЕДЕНИЕ ВКЛАДЧИКОВ ВО ВРЕМЯ «ЛОКДАУНА»

Евтухов А.Д., Жукова А.А.
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет), Москва, Россия
evtukhov.ad@phystech.edu, zhukova.aa@phystech.edu

Аннотация. В данной работе рассматривается задача социального планировщика, который стремится максимизировать свою дисконтированную полезность от потребления за конечный период времени. Найдены оптимальное управление и траектория состояния счёта, исследована оптимальная траектория при различных коэффициентах дисконтирования. Для постоянной банковской ставки доказан критерий "выпуклости".

Ключевые слова: социальный планировщик, дисконтированная полезность, оптимальное управление, коэффициент дисконтирования.

Введение

В данной работе рассмотрена задача социального планировщика, который хочет максимизировать дисконтированную полезность от потребления за конечный период времени. В модели социального планировщика мы считаем, что у каждого агента есть свои ненаблюдаемые интересы, но при выполнении некоторых условий, все агенты ведут себя оптимально как один агент, что приводит к положительным достижениям экономики. Такие модели изучаются несколько десятков лет в различных вариациях [1,2]. В данной работе исследуются оптимальные траектории в модели планирования конечного периода с целью максимизации дисконтированной полезности. Для решения таких задач используют различные методы, например, принцип максимума Понтрягина [3], уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [4] или динамическое программирование [5]. Последний из перечисленных методов использован в данной работе.

Сюжетная составляющая задачи следующая: есть потребитель, сталкивающийся с конечным горизонтом планирования, у него есть некоторый начальный запас средств, который он будет потреблять («человек на локдауне»). Также есть процентная ставка, может быть банковская, которая увеличивает его состояние. Задача потребителя – максимизировать дисконтированную полезность, где в роли функции полезности непрерывная строго возрастающая логарифмическая функция. Новизна данной постановки – возможность процентной ставки быть переменной величиной.

1. Общая постановка задачи

Мы рассматриваем задачу оптимального потребления при возможности сбережений. Формально задача записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln u_t \to \max \\ x_{t+1} = \alpha_t x_t - u_t \quad . \\ x_0 = A \\ x_{T+1} \geq 0\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения: u_t - потребление в момент времени t, а x_t - остаток на счёте. Массив $[\alpha_t]$, где $\alpha_t > 1$, является «коэффициентом прироста» по вкладу, то есть $\alpha_t = 1 + r_t$, где $r_t \in (0,1)$ - банковская ставка в момент времени t. Коэффициент $\beta \in (0,1)$ - дисконтирование, отображающее насколько агенту важно потребление в будущем. A - начальный запас денег на счёте.

1.1. Динамическое программирование

Главная идея данного метода в том, что мы ищем оптимальное потребление в виде синтеза управлений, то есть управления зависят только от текущего состояния системы, или иными словами $u_t(x_t)$.

Для этого вводится функция Беллмана $S_j(x)$, определяемая как оптимальное значение максимизируемого функционала вспомогательной задачи:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=j}^{T} \beta^t \ln u_t \to \max \\ &x_{t+1} = \alpha_t x_t - u_t \quad . \\ &x_j = x \\ &x_{T+1} \ge 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Обратим внимание на то, что задача (2) является задачей (1), но стартующей не с нулевого момента времени, а с момента времени j.

Для функции Беллмана записывается и решается уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, как необходимое условие оптимальности:

$$\begin{aligned} S_j(x) &= \max_{u_j}\left[\beta^j \ln u_j + S_{j+1}\left(\alpha_j x - u_j\right)\right], \\ S_{T+1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \ge 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя уравнения (3) можно последовательно получить все управления как аргументы, доставляющие максимум в своём уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана.

1.2. Первые шаги

Сделаем самый первый шаг для момента времени T:

$$S_T(x) = \max_{u_T}\left[\beta^T \ln u_T + S_{T+1}\left(\alpha_T x - u_T\right)\right]. \tag{4}$$

Мы знаем, что функция Беллмана в момент времени $T+1$ тождественно равна нулю (из условия на конечную точку траектории из (1)), поэтому можем переписать уравнение:

$$S_T(x) = \max_{u_T}\left[\beta^T \ln u_T\right]. \tag{5}$$

Для нахождения максимума воспользуемся снова условием на конечную точку и тем, что функция натурального логарифма является строго возрастающей, поэтому окончательное выражение:

$$S_T(x) = \beta^T \ln \alpha_T x. \tag{6}$$

Отметим, что оптимальное управление в момент времени T:

$$u_T^*(x) = \alpha_T x. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим момент времени $T-1$:

$$S_{T-1}(x) = \max_{u_{T-1}}\left[\beta^{T-1} \ln u_{T-1} + S_T\left(\alpha_{T-1} x - u_{T-1}\right)\right]. \tag{8}$$

Используя вид функции Беллмана для предыдущего шага:

$$S_{T-1}(x) = \max_{u_{T-1}}\left[\beta^{T-1} \ln u_{T-1} + \beta^T \ln\left(\alpha_T\left(\alpha_{T-1} x - u_{T-1}\right)\right)\right]. \tag{9}$$

Так как оптимальное управление должно давать максимум в соответствующем уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана, то для его нахождения необходимое решить уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial u_{T-1}}\left[\beta^{T-1} \ln u_{T-1} + \beta^T \ln\left(\alpha_T\left(\alpha_{T-1} x - u_{T-1}\right)\right)\right] = 0. \tag{10}$$

Решая уравнение (10) относительно оптимального управления в момент времени $T-1$, получаем следующее выражение:

$$u_{T-1}^{*}\left(x\right)=\frac{\alpha_{T-1}x}{1+\beta}. \tag{11}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (9) получим окончательное выражение для функции Беллмана в момент времени $T-1$:

$$S_{T-1}\left(x\right)=\left(\beta^{T-1}+\beta^{T}\right)\ln x+\beta^{T-1}\ln\frac{\alpha_{T-1}}{1+\beta}+\beta^{T}\ln\frac{\alpha_{T-1}\alpha_{T}\beta}{1+\beta}. \tag{12}$$

Для удобства записи и дальнейших выкладок можно ввести следующее обозначение для свободного члена в функции Беллмана:

$$L_{T-1}=\beta^{T-1}\ln\frac{\alpha_{T-1}}{1+\beta}+\beta^{T}\ln\frac{\alpha_{T-1}\alpha_{T}\beta}{1+\beta}. \tag{13}$$

Тогда итоговое выражение для (12):

$$S_{T-1}\left(x\right)=\left(\beta^{T-1}+\beta^{T}\right)\ln x+L_{T-1}. \tag{14}$$

Теперь мы можем найти закономерность в формуле и вывести общую формулу для любого момента времени.

1.3. Математическая индукция

Используя метод математической индукции можно доказать следующие формулы:

$$\begin{gathered}S_{T-k}\left(x\right)=\left(\beta^{T-k}+\ldots+\beta^{T}\right)\ln x+L_{T-k},\\ L_{T-k}=\sum_{i=0}^{k}\beta^{T-i}\ln\frac{\alpha_{T-k}\times\ldots\times\alpha_{T-i}\beta^{k-i}}{1+\ldots+\beta^{k}},\\ u_{T-k}^{*}\left(x\right)=\frac{\alpha_{T-k}x}{1+\ldots+\beta^{k}}.\end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что мы уже доказали базу индукции для $k=1$. Для доказательства перехода необходимо записать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для момента времени $T-k-1$ и, используя предположение математической индукции, получить уравнение на оптимальное управление в момент времени $T-k-1$. После этого полученное выражение нужно подставить в формулу для функции Беллмана и, используя технику для свёрток конечных сумм, получим выражения в предположении индукции, что тем самым доказывает переход.

Тогда мы решили поставленную задачу, так как нашли оптимальное управление в виде синтеза. Но удобнее найти оптимальное управление и траекторию через изначальные параметры нашей задачи.

2. Анализ решения

Найдём выражение для оптимальной траектории. Из постановки задачи (1) мы знаем, что две соседних точки траектории связаны следующим образом:

$$x_{t+1}=\alpha_{t}x_{t}-u_{t}. \tag{16}$$

Если в выражении для оптимального управления из (15) мы перейдём от обратного времени к прямому (иногда метод динамического программирования ассоциируют с обратным временем, так как задача решается «с конца»), и подставим в выражение (16):

$$x_{t+1}=\alpha_{t}x_{t}\frac{\beta+\ldots+\beta^{T-t}}{1+\ldots+\beta^{T-t}}. \tag{17}$$

Заметим, что мы получили однородную линейную рекурренту для последовательности оптимальной траектории. Начальное условие задано в (1). Решая данное рекуррентное уравнение:

$$x_{t+1} = A\prod_{i=0}^{t}(\alpha_i)\frac{\beta^{t+1}+\ldots+\beta^{T}}{1+\ldots+\beta^{T}}. \tag{18}$$

Обратим внимание на то, что по этой формуле получается, что конечное состояние счёта – ноль, то есть $x_{T+1}=0$. Это утверждение можно получить, предположив противное.

Теперь найдём аналогичное выражение для оптимального управления. Как мы уже говорили о переходе к прямому времени в (15), тогда мы получим следующее выражение:

$$u_{t+1} = \frac{\alpha_{t+1}x_{t+1}}{1+\ldots+\beta^{T-t-1}}. \tag{19}$$

Подставляя выведенную формулу (18) для оптимальной траектории в (19):

$$u_{t+1} = A\prod_{i=0}^{t+1}(\alpha_i)\frac{\beta^{t+1}}{1+\ldots+\beta^{T}}. \tag{20}$$

Тем самым мы получили конкретные аналитические формулы для оптимального управления и траектории через начальные параметры нашей задачи. Хочется отметить интересное свойство полученного выражения (20) для оптимального управления, а именно, данное выражение содержит только те параметры задачи, которые известны в рассматриваемый момент времени, то есть агент может принимать своё решение «здесь и сейчас», используя информацию, которая полностью ему известна (не нужно предсказывать значение каких-либо неизвестных величин, например, коэффициент прироста по вкладу).

Теперь попробуем промоделировать поведение нашего агента на реальных данных.

2.1. Реальные данные

Построим решение нашей задачи при реальных параметрах. В качестве массива коэффициентов прироста по вкладу возьмём данные с сайта Банка России. Рассматриваем период с июня 2021 года по май 2022.

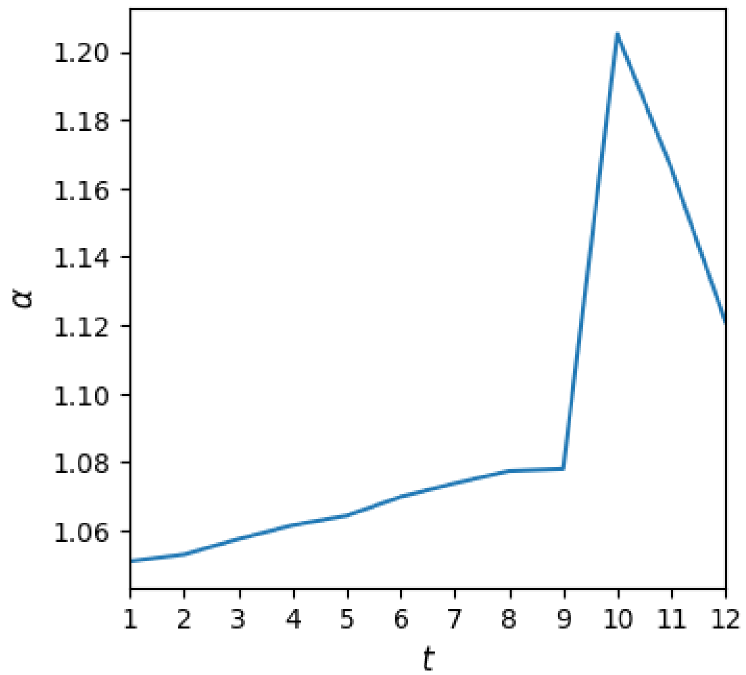

Рис. 1. Коэффициент роста

Начальная сумма вклада $A=10^6$, а коэффициент дисконтирования будем менять, то есть мы построим трубку траекторий (построение графиков в Google Colab).

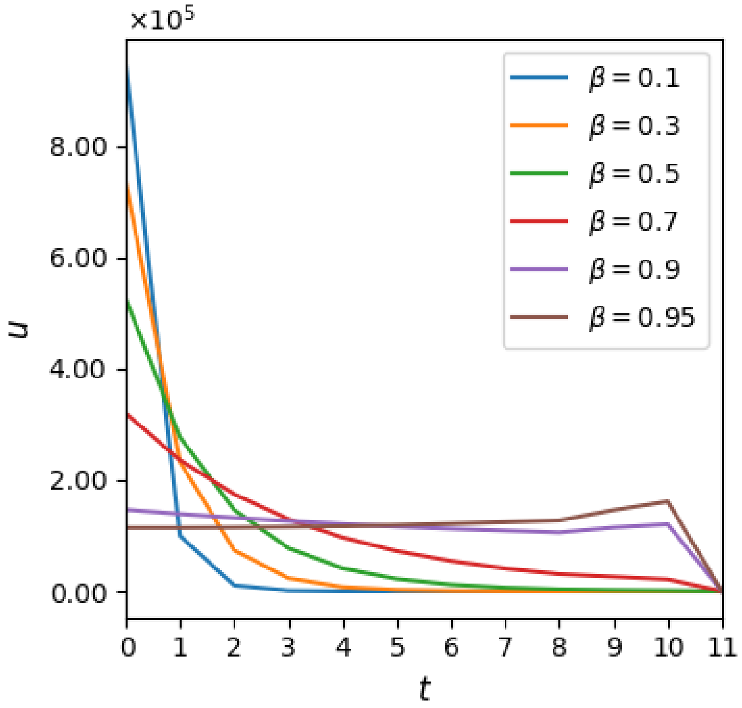

Рис. 2. Оптимальное управление

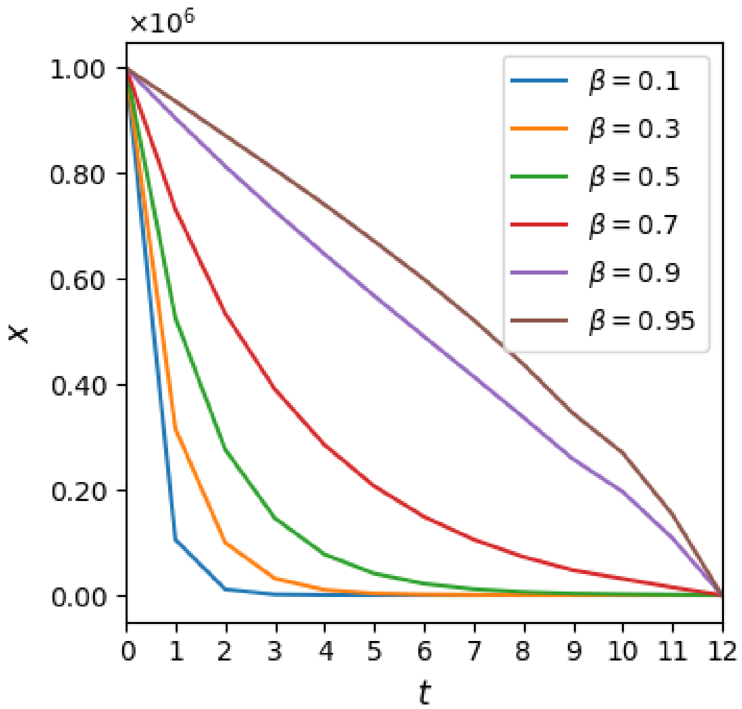

Рис. 3. Оптимальная траектория

Заметим интересное свойство графика оптимальной траектории: при некоторых значениях параметра коэффициента дисконтирования β (достаточно близких к 1) мы наблюдаем изменение «выпуклости» траектории (так как график дискретный, то нельзя говорить о классической выпуклости), формально можно сказать, что точки находятся выше «равномерной траектории» (случай поведения агента при котором счёт убывает равномерно).

2.2. Выпуклость оптимальной траектории

Мы можем записать уравнение «равномерной» прямой:

$$x_{t+1}^{0} = A - A\frac{t+1}{T+1}. \qquad (21)$$

Условие смены выпуклости можно записать в виде неравенства (или нескольких):

$$x_{t+1} - x_{t+1}^{0} > 0. \qquad (22)$$

Используя результат (18) и алгебраические преобразования, получаем эквивалентное неравенство:

$$\prod_{i=0}^{t}(\alpha_i\beta) > \frac{T-t}{T+1}\times\frac{1+\ldots+\beta^{T}}{1+\ldots+\beta^{T-t-1}}. \qquad (23)$$

В силу произвольности массива коэффициентов прироста по вкладу мы не можем улучшить условия для выпуклости. Но рассмотрим частный случай – фиксированная процентная банковская ставка, то есть $\forall i \in [0,T]: \alpha_i = \alpha = const$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$(\alpha\beta)^{t+1} > \frac{T-t}{T+1}\times\frac{1+\ldots+\beta^{T}}{1+\ldots+\beta^{T-t-1}}. \qquad (24)$$

Или в более краткой форме:

$$(\alpha\beta)^{t+1} > \frac{T-t}{T+1}\times\frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta^{T-t}}. \qquad (25)$$

Данное неравенство будет верным для любого момента времени при выполнении тривиальной оценки:

$$\alpha\beta \geq 1. \qquad (26)$$

С помощью метода математической индукции можно доказать более сильный результат, который является критерием выпуклости оптимальной траектории:

$$\alpha\beta > \frac{T}{T+1}\times\frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta^{T}}. \qquad (27)$$

Можно заметить, что данный критерий является условием для начального момента времени $t=0$ (в доказательстве критерий является базой математической индукции).

3. Заключение

Подведя итог, можно сказать, что в данной работе кроме изначальной цели – получение оптимального управления вкладом, был достигнут важный результат касательно характера поведения траектории, показывающий интересные свойства самого агента при определённых значениях параметров нашей системы. Например, банк используя данную модель и анализируя только траекторию состояния счёта, управляя при этом процентной ставкой и временным периодом самого вклада, может предсказывать значение такого важного ненаблюдаемого параметра, как коэффициент дисконтирования. Имея представление об этом параметре для конкретного агента можно предсказывать его модель поведения. Свойство выпуклости, которое зависит от всех параметров системы, показывает «желание» агента как можно дольше оставлять большую сумму на счёте.

Очень интересными выглядят возможные дальнейшие исследования данной задачи. Например, в статье мы рассматривали период времени, когда в России произошёл резкий скачок процентной банковской ставки, связанный с известными мировыми событиями. Очевидно, что в этот момент времени могли и должны измениться оценки сегодняшней и будущей полезности у агента, то есть коэффициент дисконтирования тоже должен был испытать подобный «скачок», но в нашей модели мы предполагаем его постоянной величиной. Другое возможное направление – концептуальное усложнение модели, например, возможность агенту класть деньги на свой счёт.

Литература

1. *Fuente A.* Mathematical methods and models for economics – Cambridge University Press, 2000 – P. 835.

2. *Sundaram, Rangarajan K.* A first course in optimization theory – Cambridge University Press, 1996 – P. 357.
3. *Жукова А.А., Катруца А.М., Флёрова А.Ю.* Оптимизация и оптимальное управление в задачах – МФТИ, 2021 – С. 152.
4. *Gourinchas P.* The Ramsey-Cass-Koopmans Model – Notes for Econ202A, 2015 – P.15.
5. *Бекларян Л.А., Флёрова А.Ю., Жукова А.А.* Методы оптимального управления – МФТИ, 2018 – С.191.