DOI: 10.25728/mlsd.2023.0658

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ[1]

Туницкий Д.В.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
dtunitsky@yahoo.com

Аннотация. Статья посвящена вопросам существования, единственности и регулярности слабых решений задачи Коши для одного класса полулинейных параболических дифференциальных уравнений второго порядка при наличии периодического импульсного воздействия. Рассматриваемые уравнения являются аналогами уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера на замкнутых многообразиях и имеют большое прикладное значение.

Ключевые слова: модель Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболические уравнения второго порядка, полулинейные уравнения на замкнутом многообразии, импульсное воздействие, слабые решения.

Введение

Полулинейные параболические уравнения второго порядка вида

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Lq = f(x,q), \tag{1}$$

где

$$Lq = -\sum_{l,m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(a^{l,m}(x)\frac{\partial q}{\partial x^m}\right) + \sum_{l=1}^{n} b^l(x)\frac{\partial q}{\partial x^l},\ a^{l,j}(x) = a^{j,l}(x), \tag{2}$$

– эллиптический линейный дифференциальный оператор, широко применяются для математического моделирования различных процессов, связанных с описанием реакции – диффузии. Среди многочисленных работ, посвященных таким уравнениям, в первую очередь следует выделить статьи А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского, Н.С. Пискунова [1] и Р.А. Фишера [2], в которых исследуется частный случай уравнений (1)–(2), имеющих вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^l)^2} = f(q).$$

Отметим также статью [3], содержащую информацию по истории и библиографии работ, в которых изучаются уравнения вида (1)–(2), и монографию [4], в которой приведены примеры приложений таких уравнений к биологии.

В [3] рассматриваются уравнения (1)–(2) с оператором L, имеющим периодические коэффициенты. Этот случай сводится к уравнениям на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$, и представляет значительный интерес с прикладной точки зрения. Большое значение имеют аналоги уравнений (1), (2) и на других замкнутых многообразиях. Данная статья посвящена существованию, единственности и стабилизации решений аналогов уравнения (1) на произвольных замкнутых многообразиях при наличии импульсного воздействия.

Важно заметить, что многие важные с прикладной точки зрения задачи приводят к уравнениям вида (1)–(2), некоторые коэффициенты которых не являются непрерывными. В частности, такая ситуация характерна для задач управления. Поэтому желателен выбор такого класса допустимых решений, который позволял бы построить для рассматриваемых уравнений удовлетворительную теорию при минимальных требованиях на регулярность их коэффициентов. В качестве такого класса в данной работе выступают слабые решения. В этом классе удается исследовать решения аналогов неоднородного уравнения (1) на замкнутых многообразиях при довольно низких требованиях на регулярность его коэффициентов. В частности, некоторые из них могут быть обобщенными функциями.

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).*

1. Функциональные пространства

Пусть X – гладкое замкнутое риманово n-мерное многообразие, $n = 1,2, \ldots$, т.е. связное хаусдорфово компактное многообразие без края с метрикой $g\colon \mathrm{T}X \times \mathrm{T}X \longrightarrow \mathbb{R}$. Метрика g стандартным образом продолжается на тензорные расслоения $(\mathrm{T}X)^{\otimes^m} \otimes (\mathrm{T}^*X)^{\otimes^l}$, $m, l = 0,1,2, \ldots$, многообразия X; будем ее обозначать также через g. Под $(\mathrm{T}X)^{\otimes^0} \otimes (\mathrm{T}^*X)^{\otimes^0}$ понимается тривиальное расслоение $X \times \mathbb{R}$, на котором $g(r_1, r_2) = r_1 r_2$ для $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Метрика g определяет на многообразии X меру $V = V_g$ и связность Леви–Чевита с соответствующим оператором ковариантного дифференцирования $\nabla = \nabla_g$. Для функций $u, v\colon X \to B$ введем обозначение

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_X u(x)v(x)dV, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} u(x) = \inf_{\substack{S\subseteq X,\\ V(S)=0}} \sup_{x\in X\setminus S} u(x).$$

С помощью метрики g, меры V и ковариантного дифференцирования ∇ конструируются пространства функций $L^p(X)$ и тензорных полей

$$L^p\left((\mathrm{T}X)^{\otimes^m} \otimes (\mathrm{T}^*X)^{\otimes^l}\right), \qquad p \geq 1, \ \ m, l = 0,1,2, \ldots,$$

пространства Соболева $W^{k,p}(X)$ и

$$W^{k,p}\left((\mathrm{T}X)^{\otimes^m} \otimes (\mathrm{T}^*X)^{\otimes^l}\right), \qquad k = 0,1,2, \ldots,$$

и Гельдера $C^{k,\alpha}(X)$ и

$$C^{k,\alpha}\left((\mathrm{T}X)^{\otimes^m} \otimes (\mathrm{T}^*X)^{\otimes^l}\right), \qquad 0 < \alpha \leq 1,$$

см. [5; разд. 10.2.4], [6; § 1].

Рассмотрим многообразие с краем $[T_1, T_2) \times X$, где $T_0, T_1 \in (0, +\infty]$, $T_0 < T_1$. На нем определена метрика

$$g_{[T_0,T_1)\times X} = dt^2 + g,$$

с соответствующими ей ковариантным дифференцированием $\nabla_{g_{[T_0,T_1)\times X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_g$ и мерой $V_{g_{[T_0,T_1)\times X}}$. С их помощью конструируются функциональные пространства

$$L^p([T_0, T_1) \times X), \qquad W^{k,p}([T_0, T_1) \times X), \qquad C^{k,\alpha}([T_0, T_1) \times X).$$

Для банахова пространства B с нормой $\|\cdot\|_B$ и измеримого множества $A \subseteq \mathbb{R}$ определены банаховы пространства $L^p(A; B)$ измеримых функций $v\colon A \to B$ с нормами

$$\|q\|_{L^p(A;B)} = \left(\int\limits_A \|q(t)\|_B^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ 1 \leq p < +\infty, \qquad \|q\|_{L^\infty(A;B)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in A} \|q(t)\|_B,$$

см. [7; гл. III, § 1], [8; гл. II, § 2]. Пересечение

$$W([T_0, T_1); X) = L^\infty\big([T_0, T_1); L^2(X)\big) \cap L^2\big((T_0, T_1); W^{1,2}(X)\big)$$

является банаховым пространством с нормой

$$\|q\|^2_{W([T_0,T_1);X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[T_0,T_1)} \langle q(t), q(t)\rangle + \int\limits_{T_0}^{T_1} \langle dq(t), dq(t)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)} dt.$$

2. Эллиптические операторы

Пусть наряду с метрикой g на многообразии X задано метрика a. Предположим, что найдутся такие положительные числа a_0 и a_1, для которых почти всюду по мере V (далее – п.в.)

$$a_0 g(\eta, \eta) \leq a(\eta, \eta) \leq a_1 g(\eta, \eta), \ \ \eta \in \mathrm{T}^*X. \tag{3}$$

На линейных дифференциальных формах определен дифференциальный оператор первого порядка d_g^*, сопряженный относительно метрики g с оператором d внешнего дифференцирования функций, т.е. $\langle g(du,\omega),1\rangle = \langle g\big(u, d_g^*\omega\big)(t),1\rangle$ для $u \in C^\infty(X)$ и $\omega \in C^\infty(\mathrm{T}^*X)$, см. [9; гл. VIII, § 1]. Аналогично, определен оператор $d_{a(t)}^*$. Если многообразие X ориентируемо, то $d_{a(t)}^* = - *_{a(t)} \circ\, d \circ *_{a(t)}$, где $*_{a(t)}$ – оператор Ходжа, индуцированный метрикой $a(t)$.

Зададим на функциях $u \in C^\infty(X)$ линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L\colon C^\infty(X) \ni u \mapsto \Delta u + bu + d_g^*(uc), \tag{4}$$

где $\Delta = \Delta_a = d_a^* \circ d$ – *геометрический лапласиан* (*оператор Лапласа – де Рама*), порожденный a, см. [10; гл. IV, § 5], а b и c – измеримые и ограниченные относительно метрики g векторное поле и линейная дифференциальная форма на X. В этом контексте условие (3) означает, что оператор L (4) *равномерно эллиптичен* на многообразии X.

Определим непрерывную билинейную форму

$$\mathcal{L}\colon W^{1,2}(X) \times C^\infty(X) \ni (u,v) \mapsto \langle a(du,dv),1\rangle + \langle bu,v\rangle + \langle uc,dv\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)} \in \mathbb{R},$$

ассоциированную с L. Поскольку пространство $C^\infty(X)$ плотно в $W^{1,2}(X)$, то эту форму по непрерывности можно однозначно продолжить на функции $v \in W^{1,2}(X)$.

Стационарное уравнение

$$Lu = f + d_g^* h \tag{5}$$

эллиптично в силу условия (3), и его *решением* называется такая функция $u \in W^{1,2}(X)$, что $f(\,\cdot\,,u) \in L^2(X)$ и

$$\mathcal{L}(u,v) = \langle f(\,\cdot\,,u),v\rangle + \langle h,dv\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}$$

для любых $v \in C^\infty(X)$. Функция $u \in W^{1,2}(X)$ называется субрешением (суперрешением) уравнения (5), если $f(\,\cdot\,,u) \in L^2(X)$ и

$$\mathcal{L}(u,v) \le \langle f(\,\cdot\,,u),v\rangle + \langle h,dv\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)} \qquad \big(\mathcal{L}(u,v) \ge \langle f(\,\cdot\,,u),v\rangle + \langle h,dv\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}\big)$$

для неотрицательных $v \in C^\infty(X)$.

3. Параболические уравнения

В качестве аналога правой части уравнения (1) будем рассматривать функцию

$$f\colon X \times \mathbb{R} \ni (x,r) \mapsto f(x,r) \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

которая удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной r, т.е. для любого $r \in \mathbb{R}$ найдется такая положительная постоянная $\mu_0 = \mu_0(r)$, что п.в.

$$|f(t,\,\cdot\,,r_1) - f(t,\,\cdot\,,r_2)| \le \mu_0|r_1 - r_2|,\ \ r_1,r_2 \in [-r,r]. \tag{7}$$

Эволюционное уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Lq = f + d_g^* h, \tag{8}$$

где $h \in L^2(\mathrm{T}^*X)$, является аналогом уравнения (1) на многообразии X и параболично в силу эллиптичности оператора $L = L$ (4). Рассмотрим ассоциированное с левой частью этого уравнения однопараметрическое семейство билинейных форм

$$\mathcal{L}_{T_0}^t\colon W_{loc}([T_0,T_1);X) \times C^\infty([T_0,T_1)\times X) \ni (q,p) \mapsto \int_{T_0}^t (\mathcal{L}(q,p) - \langle q,p'\rangle)(\tau)d\tau, \tag{9}$$

$t \in [T_0,T_1)$. Поскольку пространство $C^\infty([T_0,T_1)\times X)$ плотно в $W^{1,2}([T_0,T_1)\times X)$, то билинейную форму $\mathcal{L}_{T_0}^t$ (9) по непрерывности можно однозначно продолжить на функции $p \in W^{1,2}([T_0,T_1)\times X)$. Слабым решением уравнения (8) на полуинтервале $[T_0,T_1)$ называется такая функция $q \in W_{loc}([T_0,T_1);X)$, что $f\big(t,x,q(t,x)\big) \in L^2_{loc}([T_0,T_1)\times X)$ и

$$\langle q(t),p(t)\rangle + \mathcal{L}_{T_0}^t(q,p) = \langle q(T_0),p(T_0)\rangle + \int_{T_0}^t \big(\langle f\big(\,\cdot\,,q(\tau)\big),p(\tau)\rangle + \langle h,dp(\tau)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}\big)d\tau \tag{10}$$

для всякого $p \in C^\infty([T_0,T_1)\times X)$ и $t \in [T_0,T_1)$.

Функция $q \in W_{loc}([T_0,T_1);X)$ называется слабым субрешением (суперрешением) уравнения (8) на полуинтервале $[T_0,T_1)$, если $f\big(t,x,q(t,x)\big) \in L^2_{loc}([T_0,T_1)\times X)$ и для любых неотрицательных $p \in C^\infty([T_0,T_1)\times X)$ и $t \in [T_0,T_1)$

$$\langle q(t),p(t)\rangle + \mathcal{L}^t_{T_0}(q,p) \le \langle q(T_0),p(T_0)\rangle + \int_{T_0}^t \Big(\big\langle f\big(\,\cdot\,,q(\tau)\big),p(\tau)\big\rangle + \langle h,dp(\tau)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}\Big)d\tau$$

$$\Big(\ge \langle q(T_0),p(T_0)\rangle + \int_{T_0}^t \Big(\big\langle f\big(\,\cdot\,,q(\tau)\big),p(\tau)\big\rangle + \langle h,dp(\tau)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}\Big)d\tau\Big). \tag{11}$$

Ясно, что q тогда и только является слабым решением уравнения (8), когда одновременно является его слабым субрешением и суперрешением. Слабое субрешение (суперрешение) уравнения (8), которое не является его решением называется *строгим*.

В дальнейшем изложении все встречающиеся решения, субрешения и суперрешения предполагаются слабыми, и прилагательное «слабое» для краткости опускается.

Решение q уравнения (8) на $[T_0,T_1)$, принимающее заданное начальное значение

$$q(T_0) = q_0, \qquad q_0 \in L^2(X), \tag{12}$$

п.в., называется *решением задачи Коши (8), (12)*. Субрешение (суперрешение) q уравнения (8) на $[T_0,T_1)$ называется *субрешением (суперрешением) задачи* (12), если п.в.

$$q(T_0) \le q_0 \qquad (q(T_0) \ge q_0). \tag{13}$$

Замечание 1. Из определений (10) и (11) очевидно, что решение (субрешение, суперрешение) q уравнения (8) на полуинтервале $[T_0,T_1)$ является решением (субрешением, суперрешением) и на $[T_0,T) \subseteq [T_0,T_1)$. Обратно, решение (субрешение, суперрешение) q уравнения (8) на полуинтервале $[T_0,T_1)$ будет решением (субрешением, суперрешением) также на $[T,T_1) \subseteq [T_0,T_1)$. Поэтому можно следующим образом обобщить определение субрешения и суперререшения. Функция $q \in W_{loc}\big((T_0,T_1);X\big)$ называется *слабым субрешением (суперрешением) уравнения* (8) на полуинтервале $[T_0,T_1)$, если $f\big(t,x,q(t,x)\big) \in L^2_{loc}\big((T_0,T_1)\times X\big)$ и для любых неотрицательных $p \in C^\infty([T_0,T_1)\times X)$, $0 < \varepsilon < T_1 - T_0$ и $t \in [T_0+\varepsilon,T_1)$

$$\langle q(t),p(t)\rangle + \mathcal{L}^t_{T_0+\varepsilon}(q,p)$$
$$\le \langle q(T_0+\varepsilon),p(T_0+\varepsilon)\rangle + \int_{T_0+\varepsilon}^{t} \Big(\big\langle f\big(\tau,\,\cdot\,,q(\tau)\big),p(\tau)\big\rangle + \langle h(\tau),dp(\tau)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}\Big)d\tau$$
$$\left(\ge \langle q(T_0+\varepsilon),p(T_0+\varepsilon)\rangle + \int_{T_0+\varepsilon}^{t} \Big(\big\langle f\big(\tau,\,\cdot\,,q(\tau)\big),p(\tau)\big\rangle + \langle h(\tau),dp(\tau)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)}\Big)d\tau\right).$$

Соответственно, субрешение (суперрешение) q уравнения (8) на $[T_0,T_1)$ называется *субрешением (суперрешением) задачи* (1.12), если оно слабо полунепрерывно сверху (снизу), т.е. для любых неотрицательных $p \in C^\infty([T_0,T_1)\times X)$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to+0}}\langle q(T_0+\varepsilon),v\rangle \le \langle q_0,v\rangle \qquad \left(\underline{\lim_{\varepsilon\to+0}}\langle q(T_0+\varepsilon),v\rangle \ge \langle q_0,v\rangle\right).$$

Замечание 2. Если $u \in W^{1,2}(X)$ – решение (субрешение, суперрешение) уравнения (5) и $u = q_0$ ($u \le q_0$, $w \ge q_0$) п.в., то $q = u$ будет решением (субрешением, суперрешением) задачи (8), (12) на полуинтервале $[T_0,+\infty)$.

Изучим условия, при которых решение задачи Коши (8), (12) существует и единственно.

Утверждение 1. Пусть метрика $a \in L^\infty\big((\mathrm{T}^*X)^{\otimes^2}\big)$ и удовлетворяет оценке (3) с положительными постоянными $a_0,a_1 \in \mathbb{R}$, векторное поле $b \in L^\infty(\mathrm{T}X)$, линейные дифференциальные формы $c,h \in L^\infty(\mathrm{T}^*X)$, существует такое $\mu \in \mathbb{R}$, что

$$\langle c,dv\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*X)} + \langle \mu,v\rangle \ge 0$$

для неотрицательных $v \in C^\infty(X)$ и функция (6) $f \in L^\infty(X\times\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Липшица (7). Если функции $q_1,q_2 \in L^\infty([T_0,T_1)\times X)$ являются субрешением и суперрешением задачи (8), (12) на

$[T_0, T_1)$, то на $[T_0, T_1)$ существует единственное решение q этой задачи. При этом решение $q \in C([T_0, T_1); L^2(X))$, и $q_1(t) \le q(t) \le q_2(t)$ п.в. при $t \in [T_0, T_1)$.

Доказательство см. [11]. Известно, что ограниченные решения задачи (8), (12) локально непрерывны по Гельдеру. Более точно, справедлив следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда для всякого решения $q \in L^\infty([T_0, T_1) \times X)$ задачи Коши (8), (12) и $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\alpha = \alpha(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([T_0,T_1)\times X)})$, $0 < \alpha \le 1$, и $C = C(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([T_0,T_1)\times X)}) \ge 0$, что $q_{|[T_0+\varepsilon,T_1)\times X} \in C^{0,\alpha}([T_0 + \varepsilon, T_1) \times X)$ и

$$\left\|q_{|[T_0+\varepsilon,T_1)\times X}\right\|_{C^{0,\alpha}([T_0+\varepsilon,T_1)\times X)} \le C.$$

Доказательство утверждения 2 при наложенных на коэффициенты оператора L (4) и функцию f (6) ограничениях вытекает из известных свойств решений линейных параболических уравнений, см. [12; гл. VI, § 7]. Естественно, при дальнейшем повышении регулярности коэффициентов уравнения (8) соответствующим образом повышается и регулярность его решений, см. [12; гл. VI, § 2].

4. Периодическое импульсное воздействие

Математическое моделирование процессов, связанных с периодическим сбором/восполнением возобновляемых распределенных ресурсов, приводит к задаче (8), (12) на полуинтервале $[0, +\infty)$, решение q которой дополнительно удовлетворяет условию периодического импульсного воздействия

$$q(kT) = sq(kT-), \qquad k = 1,2,..., \tag{14}$$

с заданным периодом $T > 0$ и измеримым множителем $0 \le s \le 1$ п.в. *Решением задачи (8), (14)* называется функция q, являющаяся решением уравнения (8) на полуинтервалах $[(k-1)T, kT)$, имеющая в точках kT левые предельные значения в норме $\|\cdot\|_{L^2(X)}$ и п.в. удовлетворяющая равенствам (14). Иными словами, решение задачи (8), (14) – это набор решений уравнения (8) на полуинтервалах $[(k-1)T, kT)$, значения которых в точках kT согласованны условиями (14). Аналогично, *субрешением (суперрешением) задачи (8), (14)* называются функция q, являющаяся субрешением (суперрешением) уравнения (8) на полуинтервалах $[(k-1)T, kT)$, имеющая в точках kT левые предельные значения в норме $\|\cdot\|_{L^2(X)}$ и п.в. удовлетворяющая неравенствам

$$q(kT) \le sq(kT-) \qquad (q(kT) \ge sq(kT-)),\ k = 1,2,\dots. \tag{15}$$

Если решение q при $T_0 = 0$ еще и п.в. принимает начальное значение (12), то оно называется *решением задачи (8), (12), (14)*. Аналогично, если субрешение (суперрешение) при $T_0 = 0$ еще и п.в. удовлетворяет соответствующему неравенству (13), то оно называется *субрешением (суперрешением) задачи (8), (12), (14)*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если функция $s = 1$, то (14) превращается в условие непрерывности q в точках kT слева, а решение задачи (8), (12), (14) – в решение задачи (8), (12) на $[0, +\infty)$. В этом смысле задача (8), (12), (14) – обобщение задачи (8), (12) на $[0, +\infty)$, являющейся ее частным случаем. Аналогичным образом, (15) превращается при $s = 1$ в условие полунепрерывности снизу (сверху) в точке kT слева, а субрешение (суперрешение) задачи (8), (14) превращается в субрешение (суперрешение) уравнения (8) на полуинтервале $[0, +\infty)$.

Из утверждений 1 и 2 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть на полуинтервале* $[T_0, T_1) = [0, +\infty)$ *выполнены условия утверждения 1. Если* q_1 *и* q_2 *являются субрешением и суперрешение задачи (8), (12), (14), то существует единственное решение* q *задачи (8), (12), (14). При этом* $q_1(t) \le q(t) \le q_2(t)$ *п.в. при* $t \in [0, +\infty)$, $q \in C([(k-1)T, kT); L^2(X))$ *при* $k = 1,2,...$, *и для любых полуинтервала* $[(k-1)T, kT)$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\alpha = \alpha(k, \varepsilon)$, $0 < \alpha \le 1$, *что* $q_{|[(k-1)T+\varepsilon,kT)\times X} \in C^{0,\alpha}([\varepsilon + (k-1)T, kT) \times X)$.

По утверждению 2 решение q задачи (8), (14), принадлежащее $L^\infty_{loc}([0, +\infty) \times X)$, обладает в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ левыми предельными значениями $q(kT-) \in C^{0,\alpha_k}(X)$, $0 < \alpha_k \le 1$. А в случае $q \in L^\infty([0, +\infty) \times X)$ значения $q(kT-) \in C^{0,\alpha}(X)$, где $0 < \alpha \le 1$ и $k = 1,2,\dots$.

Накладываемые в утверждении 1 и теореме 2 условия на наличие субрешения q_1 и суперрешения q_2 придают им условный характер. Однако, в целом ряде важных с точки зрения приложений случаев q_1 и q_2 постоянны, см. [3] и [13], либо их нахождение сводится к решению интегральных или дифференциальных неравенств первого порядка для функций одного переменного. Например, при $c, h \in W^{1,\infty}(X)$, $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times X)$ и $q_0 \in L^\infty(X)$ найдутся такие $q_{0,1}, q_{0,2} \in \mathbb{R}$ и $f_1(r), f_2(r) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, что

$$q_{0,1} \le q_0 \le q_{0,2}, \qquad f_1(r) \le -r d_g^* c + f(\,\cdot\,, r) + d_g^* h \le f_2(r)$$

п.в. Поэтому, если функции $q_1, q_2 \in C_{loc}\big([T_0, T_1)\big)$ удовлетворяют неравенствам

$$q_1(t) - q_1(T_0) \le \int\limits_{T_0}^{t} f_1\big(q_1(\tau)\big) d\tau\,, \qquad q_1(T_0) \le q_{0,1},$$

$$q_2(t) - q_2(T_0) \ge \int\limits_{T_0}^{t} f_2\big(q_2(\tau)\big) d\tau\,, \qquad q_2(T_0) \ge q_{0,2},$$

то они являются субрешением и суперрешением задачи (8), (12) в силу принципа сравнения; см. § 3, лемма 3. Если q_1 и q_2 абсолютно непрерывны, то достаточно, чтобы

$$\frac{dq_1}{dt} \le f_1\big(q_1(t)\big),\ \ q_1(T_0) \le q_{0,1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} \ge f_2\big(q_2(t)\big),\ \ q_2(T_0) \ge q_{0,2}.$$

Зачастую решение выведенных неравенств не составляет большого труда, а иногда их решениями являются постоянные $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, $q_1 < q_2$.

Пример. Рассмотрим функцию $q = q(t, x)$, значения которой – плотность распределения некоторого возобновляемого распределенного ресурса в точке x замкнутого многообразия X в момент времени $t \in [0, +\infty)$. Для многих приложений математическая модель эволюции такого распределения сводится к частному случаю уравнения (8) вида

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Delta_a q + bq = A(x)q - B(x)q^2,$$

где $A, B, \gamma \in L^\infty(X)$, $B \ge B_0$ п.в., а B_0 – некоторая вещественная неотрицательная постоянная, ср. с [14]. Здесь метрика a в операторе L (4) характеризует диффузию ресурса, векторное поле b – его перенос, а коэффициенты A и B – темпы обновления и насыщения им среды. Начальное значение плотности распределения

$$q(0) = q_0 \in L^\infty(X), \qquad q_0 \ge 0.$$

Очевидно, что $q_1 = 0$ является субрешением поставленной задачи Коши. Согласно описанной выше процедуре построения суперрешения в качестве f_2 можно выбрать

$$f_2(r) = A_0 r - B_0 r^2,$$

где $A_0 \ge \|A\|_{L^\infty(X)}$. Тогда решение q_2 неравенств

$$\frac{dq_2}{dt} \ge q_2(A_0 - B_0 q_2), \qquad q_2(0) \ge q_{0,2},$$

где $q_{0,2} \ge \|q_0\|_{L^\infty(X)}$, будет суперрешением рассматриваемой задачи Коши. В частности, таковым является $q_2(t) = q_{0,2} e^{tA_0}$. Кроме того, если $B_0 > 0$, то суперрешением рассматриваемого уравнения будет и вещественная постоянная $q_2 \ge \frac{A_0}{B_0}$.

Решение задачи (8), (14) называется *периодическим* с периодом $T > 0$, если п.в.

$$q(t) = q(t + T), \qquad 0 \le t < +\infty. \tag{16}$$

Периодическим субрешением (суперрешением) задачи (8), (14) называется субрешение (суперрешение) q задачи (8), (14), удовлетворяющее равенству (16) и неравенству

$$q(0) \le sq(T\,-) \quad \Big(q(0) \ge R^s_{r_0}\big(q(T\,-)\big)\Big).$$

Если субрешение (суперрешение) q при $T_0 = 0$ еще и п.в. удовлетворяет неравенству (13), то оно называется *субрешением (суперрешением) задачи (8), (12), (14), (16)*.

Выясним условия, при которых решение q задачи (8), (12), (14) при $t \longrightarrow +\infty$ стремится к решению задачи (8), (14), (16), т.е. к периодическому решению.

Функция f (6) *строго сублинейна справа*, если

$$f(\,\cdot\,, r) = 0, \qquad \beta f(\,\cdot\,, r) < f(\,\cdot\,, \beta r)$$

п.в. для $r > 0$ и $0 < \beta < 1$. Имеет место следующий факт о существовании, единственности и асимптотических свойств решения задачи (8), (14), (16).

ТЕОРЕМА 2 (стабилизация к периодическому решению). *Пусть на полуинтервале* $[T_0, T_1) = [0, +\infty)$ *выполнены условия утверждения 1. Предположим, что* f *строго сублинейна справа и* $\tilde{q}$ *– такое периодическое суперрешение задачи (8), (14), что* $\tilde{q}(0) \geq 0$ *п.в. и* $\|\tilde{q}(0)\|_{L^\infty(X)} > 0$. *Тогда существует единственное периодическое решение* q_∞ *задачи (8), (14), такое что* $0 \leq q_\infty(t) \leq \tilde{q}(t)$ *п.в. для* $t \in [0, T)$, *и при любом начальном значении* q_0, *которое* $0 \leq q_0 \leq \tilde{q}(0)$ *п.в. и* $\|q_0\|_{L^\infty(X)} > 0$, *для решения* q *задачи (8), (12), (14) справедливо*

$$\lim_{t \to +\infty} \|q(t) - q_\infty(t)\|_{L^\infty(X)} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если функция $s = 1$ п.в., то (14) превращается в условие непрерывности q в точке kT слева согласно замечанию 3. Следовательно, по теореме 2 решение задачи Коши (8), (12) равномерно стремится к непрерывному периодическому решению q_∞ уравнения (8). Причем в случае, когда коэффициенты (8) не зависят явно от t, решение q_∞ в силу его единственности также от t не зависит и является решением стационарного уравнения (5), см. [11; разд. 2.2], [6; разд. 2.2, 2.3].

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. – С. 1–26.
2. *Fisher R.A.* The advance of advantageous genes. // Ann. Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 335–369.
3. *Berestycki H., François H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model : I – Species persistence // J. Math. Biol. – 2005. – Vol. 51. – P. 75–113.
4. *Pethame B.* Parabolic Equations in Biology. – Heidelberg: Springer, 2015. – 203 p.
5. *Nicolaescu L.I.* Lectures on the Geometry of Manifolds. – New Jersey: World Scientific, 2021. – 700 p.
6. *Туницкий Д.В.* О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 5. – С. 97–115.
7. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. – Providence, RI: AMS, 1997. – 294 p.
8. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites. – Berlin: Springer Verlag, 1961. – 300 p.
9. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи – Зингера об индексе. – М.: Мир, 1970. – 360 с.
10. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. – М.: Мир, 1976. – 286 с.
11. *Туницкий Д.В.* О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Известия РАН. Серия математическая. 2023. Т. 87, № 4. – С. 186–204.
12. *Lieberman G.M.* Second Order Parabolic Differential Equations. – New Jersey: World Scientific, 2005. – 452 p.
13. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: II – Bbiological invasions and pulsating travelling fronts // J. Math. Pures Appl. – 2005. – Vol. 84. – P. 1101–1146.
14. *Davydov A.A., Vinnikov E.V.* Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting // Dynamic Control and Optimization (DCO 2021). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2023. – Vol. 407. – P. 101–112.