DOI: 10.25728/mlsd.2023.0651

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ЖЕРТВА-ХИЩНИК НА ОСНОВЕ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Ткачева О.С., Уткин В.А.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
tkolga17@gmail.com, vicutkin@ipu.ru

Аннотация. В статье рассматривается двумерная модифицированная модель Лотки-Вольтерра. Для стабилизации популяции жертв рассматривается подход, основанный на расширении пространства состояний. Для восстановления неизмеримых переменных и шумов предлагается наблюдатель.

Ключевые слова: система Лотки-Вольтерра, расширение пространства состояний, наблюдатель, фиктивное управление.

Введение

Задачи анализа и синтеза экологических систем вызывают неослабевающий повышенный интерес, как в научном сообществе, так и в практической плоскости [1]. Учитывая, что экологические модели используются не только в описание экологических проблем, но и в ряде других областей таких, как медицина [2], сельское хозяйство и т. д. в настоящее время это направление становится особенно актуальным. В частности, повышенный интерес проявляется к задачам управления такими системами. Значительный прогресс в задачах управления экологическими системами был достигнут в рамках синергетического подхода в управлении, развитым в работах научной школы А.А. Колесникова [3]. Основная идея синергетической теории управления в экологических системах состоит в использовании для управления движением естественных аттракторов, к которым стремится изображающая точка системы.

В данной работе рассмотрены ряд недостаточно изученных задач управления в экологических системах на модели Лотки-Вольтерра. Побудительными мотивами к изучению этой задачи стал тот факт, что известный метод АКАР, [1] используемый в синергетической теории управления весьма схож по содержанию как с блочным принципом управлении, длительное время развиваемый авторами данной работы [4], так с методом попятного синтеза [5].

В данной работе рассматривается задача управления экологическими системами в робастной постановке весьма актуальной в силу того, что параметры модели управления часто неизвестны [6,7]. В отличие от методов идентификации параметров [8] в данной работе слагаемые с параметрическими неопределенностями отнесены к внешним возмущениям. Указанные внешние возмущения оцениваются с использованием каскадного подхода к синтезу наблюдателей [9] с использование глубоких обратных связей [10,11]. Полученные оценки возмущений используются для синтеза комбинированных обратных связей, что обеспечивает инвариантность замкнутых систем [12]. Кроме того, с с использованием блочного подхода и синтеза локальных обратных связей и управления в виде линейных функций с насыщением предложены подходы, позволяющие учесть естественные ограничения на используемые ресурсы и собственно управления [13-15].

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приводится модель Лотки-Вольтерра, вводятся предположения о ее неопределенностях, среде функционирования и ограничениях. Делается постановка задачи о поддержании плотности жертв на заданном уровне. В разделе 2 синтезируется обратная связь в предположении о полной сигнальной и параметрической определенности с учетом заданных ограничений. В разделе 3 разработан наблюдатель состояния и возмущений с использованием каскадного подхода [13] в рамках систем с глубокими обратными связями [15].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель "хищник–жертва" Лотки – Вольтера [16]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1^2 - \frac{x_1 x_2}{k + x_1}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1 x_2}{k + x_1} - cx_2 + u, \end{aligned} \tag{1}$$

где переменные x_1 - плотность популяции жертвы, x_2 - плотность популяции хищников доступны для измерения, u - управление, $a.b,c,k$ = const > 0.

В экологических системах параметры b (мальтузианский параметр) и a/b (несущая способность окружающей среды), а также параметр c (характеризует естественную убыль хищников), вообще говоря, не остаются постоянными по времени. Для того чтобы учесть этот факт сформулируем робастную постановку задачи, а именно, предположим, что параметры a, b, c не известны и могут быть представлены в виде

$$a = a_0 + \Delta a,\ b = b_0 + \Delta b,\ c = c_0 + \Delta c, \tag{2}$$

где положительные параметры $a_0 > 0, b_0 > 0, c_0 > 0$ полагаются известными, а $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ неизвестные константы

$$|\Delta a| < a_0,\ |\Delta b| < b_0,\ |\Delta c| < c_0. \tag{3}$$

С учетом (2) и (3) система (1) может быть записана в параметрически определенном виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_0 x_1 - b_0 x_1^2 - \frac{x_1 x_2}{k + x_1} + \eta_1(x, t), \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1 x_2}{k + x_1} - c_0 x_2 + \eta_2(x, t) + u, \end{aligned} \tag{4}$$

где слагаемые

$$\eta_1(.) = \Delta a x_1 - \Delta b x_1^2,\ \eta_2(.) = -\Delta c x_2 \tag{5}$$

будем в дальнейшем рассматривать в качестве внешних возмущений.

Ставится задача поддержание плотности популяции жертв на заданном уровне

$$e_1 = x_1 - x_{1d}(t) \to 0,\ \dot{x}_{1d} = 0 \tag{6}$$

при естественных биологических ограниченьях вида

$$\begin{aligned} & x_1 \in [X_{11}, X_{12}], x_2 \in [0, X_2],\ |u| \le U,\ |\eta_i| \le N_i, i = 1,2 \\ & X_{11}, X_{12}, X_2, U, N_i = const. \end{aligned} \tag{7}$$

Для учета ограничений (7) далее будут использоваться линейные функции с насыщением.

Определение [1]. Пусть $M = \text{const} > 0$. Тогда

$$sat_M(s) = min(M, |s|)sign(s),$$

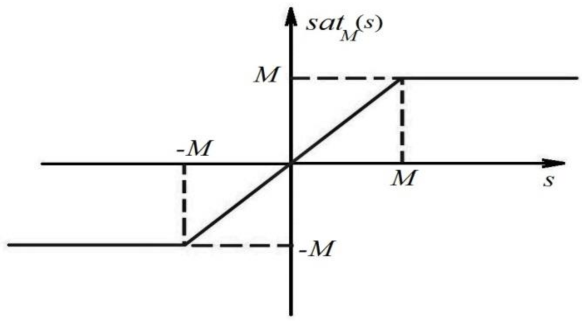

Рис. 1. График функции насыщения

$$sat_M^+(s) = 0,5sat_M(s)[1 + sign(s)]$$

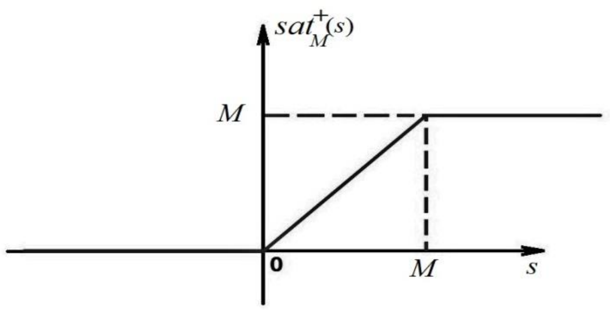

Рис. 2. График положительно-определенной функции насыщения

Далее области значений функций $|s| \le M$ в первом случае и $s \in (0, M)$ во втором будем называть линейными зонами.

2. Построение обратной связи в условиях полной определенности

В этом разделе синтезируется обратная связь, обеспечивающая решение задачи поддержание плотности жертв на заданном уровне (3) с учетом ограничений (7) с использованием блочного подхода [4].

1 шаг. Введем замену переменных вида

$$\bar{x}_2 = x_2 - \mathrm{sat}^{+}_{M_1}(s_1), \tag{8}$$

$$s_1 = (k + x_1)(-\alpha + \beta x_1 + \eta_1 / x_1) \tag{9}$$

В предположении $M_2 \le X_2$ ограничения (7) на переменную $x_2 \in [0, X_2]$ выполняются.

Система (4) относительно новой переменной (8) описывается уравнениями (10), (11).

$$\dot{x}_1 = (a_0 + \Delta a)x_1 - (b_0 + \Delta b)x_1^2 - \frac{x_1}{k + x_1}[sat^{+}_{M_1}(s_1) + \bar{x}_2], \tag{10}$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = (\frac{x_1}{k + x_1} - c_0)[\bar{x}_2 + sat^{+}_{M_1}(s_1)] - \frac{d}{dt}[sat^{+}_{M_1}(s_1)] + \eta_2(.) + u. \tag{11}$$

2 шаг. Выбор обратной связи

$$\mathrm{u} = sat_{M_2}(s_2), \tag{12}$$

где

$$s_2 = -(\frac{x_1}{k + x_1} - c_0)[\bar{x}_2 + sat^{+}_{M_1}(s_1)] + \frac{d}{dt}[sat^{+}_{M_1}(s_1)] - \eta_2(.) - \lambda \bar{x}_2, \tag{13}$$

что обеспечивает экспоненциальную сходимость переменной $\bar{x}_2$ при функционировании системы в линейной зоне ($|s_2| \le M_2$)

$$\dot{\bar{x}}_2 = -\lambda \bar{x}_2,\ \lambda = const > 0. \tag{14}$$

Отметим, что при выполнении условия $M_2 \le U$ ограничение на управление (7) выполняются.

Теорема 1. Пусть дана система вида

$$\dot{s}_2 = -\phi_2(.)[\mathrm{sat}^{+}_{M_2}(s_2) + \varphi_2(.)] + \psi_2(.), \tag{15}$$

где положим выполненными следующие условия

$$\phi_2 \ge \Phi_2,\ |\varphi_2| \le \Xi,\ |\psi_2| \le \Psi_2,\ \ \Phi_2, \Xi_2,\ \Psi_2 = const > 0. \tag{16}$$

Тогда выбором параметра M_2 из неравенства $\mathrm{M}_2 > \Xi_2 + \Psi_2/\Phi_2$ обеспечивается попадание переменной $|s_2| \le \mathrm{M}_2$ в линейную зону.

Доказательство.

Вопрос о попадании в линейную зону определяется на основе второго метода Ляпунова. Выберем кандидата на функцию Ляпунова выражение

$$V = 0{,}5 s_2^2. \tag{17}$$

Производная функции (17) в силу системы (15) в нелинейной зоны ($|s_2| > M_2$) имеет вид

$$\dot{\mathrm{V}} = -\phi_2(.)[\mathrm{M}_2|s_2| + s_2\varphi_2(.)] + s_2\psi_2(.) \le$$
$$\le -\Phi[(\mathrm{M}_2 + \Xi_2) + \Psi_2]|s| < 0 \Rightarrow \mathrm{M}_2 > \Xi_2 + \frac{\Psi_2}{\Phi_2}$$

и отрицательна в нелинейной зоне и, значит, при указанном выборе амплитуды

$$\mathrm{M}_2 > \Xi_2 + \frac{\Psi_2}{\Phi_2}$$

изображающая точка системы сходится в линейную зону $|s_2| \le M_2$.

Применительно к системе (13) ограничения на функции $\varphi_2(.)], \psi_2(.)$ можно оценить. В данном случае критичен только знак функции $\phi_2 \ge \Phi_2 = const > 0$ и знание ее оценки снизу.

Дифференцируя выражение (13) с учетом (11) получаем

$$\phi_2(.) \ge \frac{x_1}{k + x_1} + c + \lambda > 0.$$

Заметим, что, с ростом коэффициента λ эта функция возрастает и вместе с тем появляется дополнительная возможность уменьшить амплитуду M_2 из неравенства, приведенного в теореме1.

3 шаг. Рассмотрим автономное уравнение (10) при $\bar{\mathrm{x}}_2 = 0$

$$\dot{x}_1 = a_0 x_1 - b_0 x_1^2 + \eta_1 - \frac{x_1}{k + x_1} sat^+_{M_1}(s_1). \tag{18}$$

В линейной зоне уравнение (18) с учетом (9) принимает вид

$$\dot{x}_1 = (a_0 + \alpha)x_1 - (b_0 + \beta)x_1^2. \tag{19}$$

В установившемся режиме плотность жертв, определяемая из уравнения (19) устанавливается на вполне уровне

$$x_{1s}\big|_{\bar{x}_2 = 0} = \frac{a_0 + \alpha}{b_0 + \beta}.$$

Выбором управляющих параметров α, β обеспечивается заданная плотность жертв из (3) $x_{1s}\big|_{\bar{x}_2 = 0} = \dfrac{a_0 + \alpha}{b_0 + \beta} = \mathrm{x}_{1\mathrm{d}}$, причем выбор управляющих параметров ограничивается соотношениями

$$a_0 + \alpha > 0,\ b_0 + \beta > 0 \Rightarrow |\alpha| < a_0,\ |\beta| < b_0. \tag{20}$$

Установившиеся значение плотности хищников, определяется из уравнения (8) $x_2 = \mathrm{sat}^+_{\mathrm{M}_2}(\mathrm{s}_2)\big|_{x_1 = x_{1s}}$ при функционировании системы в линейной зоне $x_{2s} = s_1\big|_{x_1 = x_{1s}} = (k + x_{1s})[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)x_{1s}]$ или, после подстановки, имеем установившееся значение плотности хищников:

$$x_{2s} = (k + \frac{a_0 + \alpha}{b_0 + \beta})[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)\frac{a_0 + \alpha}{b_0 + \beta}.$$

Требование $x_{2s} \ge 0$ накладывает дополнительное ограничение на возможные вариации параметров (3)

$$-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b) > 0 \Rightarrow \beta - \alpha > |\Delta a| + |\Delta b|. \quad (21)$$

Сформулируем следующий результат.

Теорема 2. Пусть дана система вида

$$\dot{s}_1 = -\phi_1(.)[sat^{+}_{M_1}(s_1) - \varphi_1(.)] + \psi_1(.) \quad (15)$$

где положим выполненными следующие условия

$$\phi_1 \ge \Phi_1,\ |\varphi_1| \ge \Xi_1,\ |\psi_1| \le \Psi_1,\ \Phi_1\Xi_1 > \Psi_1. \quad (22)$$

где $\Phi_1, \Xi_1, \Psi_1 = const > 0$.

Тогда выбором параметра из неравенства $M_1 > \Xi_1 + \dfrac{\Psi_1}{\Phi_1}$ обеспечивается попадание переменной $|s_1| \le \mathrm{M}_1$ в линейную зону.

Доказательство.

Вопрос о попадании в линейную зону определяется на основе неравенств $s_1\dot{s}_1 < 0,\ s_1 \in (-\infty, 0) \cup (M_1, \infty)$.

Пусть $s_1 > \mathrm{M}_1$:

$$\dot{s}_1 = -\phi_1(.)[M_1 - \varphi_1(.)] + \psi_1(.) \le -\Phi[M_1 + \Xi_1] + \Psi_1 < 0, \Rightarrow M_1 > \Xi_1 + \frac{\Psi_1}{\Phi_1}.$$

Пусть $s_1 < 0$:

$$\dot{s}_1 = \phi_1(.)\varphi_1(.) + \psi_1(.) \le \Phi\Xi_1 + \Psi_1 > 0 \Rightarrow \Phi_1\Xi_1 > \Psi_1.$$

В отличие от условий теоремы 1 в теореме 2 изменены условия (16) на (22).

Применительно к системе (10) запишем уравнение относительно переменной s_1 из (9) с учетом (5)

$$s_1 = (k + x_1)[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)x_1] \quad (23)$$

и найдем производную с учетом с учетом (10):

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= \dot{x}_1[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)x_1] + (k + x_1)(\beta - \Delta b)\dot{x}_1 = \\
&= [-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)x_1 + (k + x_1)(\beta - \Delta b)]\,\dot{x}_1 = \\
&= [-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)(k + 2\dot{x}_1] \times [a_0x_1 - b_0x_1^2 + \eta_1 - \frac{x_1}{k + x_1} sat^{+}_{M_1}(s_1)].
\end{aligned}$$

Тогда $\phi_1 = \dfrac{x_1}{k + x_1}[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)(2x_1 + k)] > 0$, с ростом $\beta \to \infty$ это всегда можно обеспечить.

Оценим функцию $\varphi_1 = a_0x_1 - b_0x_1^2 + \eta_1$. Заметим, что эта парабола направленная ветвями вниз, с одной стороны и ее поведение зависит от параметров. С другой стороны, ограничения в теореме 2 наложены на модуль функции. Тогда: $|\varphi_1| = |a_0x_1 - b_{01}^2 + \eta_1| \ge |a_0X_{11} - b_0X_{11}^2 - N_1| = |\Xi_1|$.

Аналогично с функцией $\psi_1 = [-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)(2x_1 + k)]\,(a_0x_1 - b_0x_1^2 + \eta_1)$. Оценим ее модуль:

$$|\psi_1| = |[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)(2x_1 + k)]\,(a_0x_1 - b_0x_1^2 + \eta_1)| \ge |[-(\alpha - \Delta a) + (\beta - \Delta b)(2x_1 + k)]\Xi_1| = |\Psi_1|.$$

Перепишем это в следующем виде:

$$|\Psi_1| = \left|\frac{k + x_1}{x_1}\Phi_1\Xi_1\right|.$$

Тогда имеем следующий результат, согласующийся с доказанной теоремой:

$$|\Psi_1| \le |\Phi_1 \Xi_1|.$$

3. Построение наблюдателя для восстановления возмущений.

Далее используется следующий результат.

Лемма [15]. Пусть дана система $\dot{\varepsilon}(t) = -l\varepsilon(t) + \eta(t)$, $|\eta(t)| \le N$, $|\dot{\eta}(t)| \le \overline{N}$. Тогда через конечный промежуток времени $t_1 \ge 0$ справедливы оценки:

$$|\varepsilon(t)| \le \Delta = \frac{N}{l},\ |\dot{\varepsilon}(t)| \le \overline{\Delta} = \frac{\overline{N}}{l},\ \Delta, \overline{\Delta} = const,\ -l\varepsilon(t) + \eta(t) = \overline{\delta}(t) \le \overline{\Delta}.$$

В силу того, что $\lim\limits_{l\to\infty} \overline{\Delta} \to 0$ последнее утверждение леммы позволяет оценить неизвестное возмущение с заданной точностью:

$$l\varepsilon(t) = \eta(t) + \overline{\delta}(t),\ \overline{\delta}(t) \le \overline{\Delta}.$$

Построим наблюдатель возмущений применительно к системе (4) в предположении, что для измерения доступны переменные x_1, x_2

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_0 x_1 - b_0 x_1^2 - \frac{x_1 x_2}{k + x_1} + l_1 \varepsilon_1, \\ \dot{z}_2 &= \frac{x_1 x_2}{k + x_1} - c_0 x_2 + \eta_2(x,t) + u(.) + l_2 \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{24}$$

И запишем систему уравнений относительно невязок $\varepsilon_i = x_i - z_i$, $i = 1,2$:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \eta_1(.) - l_1\varepsilon_1,\ \dot{\varepsilon}_2 = \eta_2(x,t) - l_2\varepsilon_2. \tag{25}$$

В предположении $|\eta_1(t)| \le N_1$, $|\dot{\eta}_1(t)| \le \overline{N}_1$, $|\eta_2(t)| \le N_1$, $|\dot{\eta}_2(t)| \le \overline{N}_2$, $N_i, \overline{N}_i = \text{const} > 0,\ i = 1,2$, согласно лемме, имеем оценки возмущений с наперед заданной точностью:

$$|\varepsilon_i(t)| \le \Delta_i = \frac{N_i}{l_i} \Rightarrow z_i = x_i + \delta_i,\ \delta_i \le \Delta_i,\ l_i\varepsilon_i(t) = \overline{\eta}_i = \eta_i(t) + \overline{\delta}_i(t),\ \overline{\delta}_i(t) \le \overline{\Delta}_i = \frac{\overline{N}_i}{l_i}.$$

Подставляя в управление (9), (10) полученные оценки $\overline{\eta}_i = l_i\varepsilon_i(t),\ i = 1,2$ получим решение поставленной задачи (6) также с наперед заданной точностью.

4. Заключение

В работе решена экологическая задача поддержания на заданном уровне количества жертв с использованием, описываемая модифицированной модель Лотки-Вольтерра. Отличительной особенностью предложенных подходов является решение поставленной задачи в робастной постановке, с учетом ограничений на фазовые переменные и управление. Робастность обеспечивается за счет отнесения параметрических неопределенностей к внешним возмущениям и получение их оценок с помощью наблюдателя возмущений с использованием глубоких обратных связей. Учет ограничений на фазовые переменные и управления осуществляется выбором локальных обратных связей и управления в классе линейных функций с насыщением.

Литература

1. *Hofbauer, J.; Sigmund K.* Dynamical Systems and Lotka–Volterra Equations. Evolutionary Games and Population Dynamics. – New York: Cambridge University Press. 1998. pp. 1–54.M.: Университетская книга, 2004. – 770 с.
2. *Виноградова М.С.* Динамическая модель клеточной популяционной системы // Наука и образование. Электрон. журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2013. - №12. - С.175-192.
3. *Колесников А.А., Веселов Г.Е., Вавилов О.Т.* Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления. Ч. II / Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 559 с.
4. *Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И.* Принцип блочного управления // АиТ. 1990. Часть 1. №5. С.38–47.

5. *M. Krstic, P. V. Kokotovic, I. Kanellakopoulos*, Nonlinear and Adaptive Control Design, 1st Edition, John Wiley Sons, Inc., USA, 1995.
6. *Loukianov, A.G., Dominguez, J.R., and Sastillo-Toledo, B.*, Robust Sliding Mode Regulation of Nonlinear Systems, Automatica, 2018, vol. 89, pp. 241–246.
7. *Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // АиТ. 2011. № 8. С. 65–95.
8. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // АиТ. 2014. № 9. С. 62–81
9. *Уткин В.А.* Метод разделения движений в задачах наблюдения // Автоматика и телемеханика. 1990. № 3. С. 27–37.
10. *Khalil H.K., Praly L.* High-gain observers in nonlinear feedback control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2014. V. 24. No. 6. P. 993–1015.
11. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // АиТ. 2017. № 12. С.26–53.
12. *Antipov A.S., Krasnova S.A., UtkinV.A.* Methods of Ensuring Invariance with Respect to External Disturbances: Overview and New Advance // Mathematics. 2021. Vol. 9, Iss. 23.
13. *Utkin, A.V.,Utkin, V.A. and Krasnova, S.A.* Synthesis of a Control System for a Waste Heat Boiler with Forced Circulation under Restrictions on Control Actions //Mathematics.2022. Vol*10*, 2397.
14. *Campos, E.; Monroy, J.; Abundis, H.; Chemori, A.; Creuze, V.; Torres, J.* A nonlinear controller based on saturation functions with variable parameters to stabilize an AUV. Int. J. Nav 2019, 11, 211–224.
15. *Гулюкина С.И., Уткин В.А.* Управление реактором с непрерывным перемешиванием в условиях неопределенности и с учетом ограничений на фазовые переменные и управления // Проблемы управления. 2021. № 5. С. 48-59.