DOI: 10.25728/mlsd.2023.0639

РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПИД ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Соболев В.А.

ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

v.sobolev@ssau.ru

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией для случая пропорционально-интегрально-дифференциальных законов управления. Применение метода расщепления, основанного на использовании техники интегральных многообразий быстрых и медленных движений, позволяет осуществлять редукцию к системам меньшей размерности.

Ключевые слова: оптимальное слежение, сингулярные возмущения, интегральные многообразия, редукция, ПИД-управление.

Введение

Работа посвящена анализу линейно-квадратичной задачи оптимального слежения с сингулярными возмущениями при возможности использования пропорционально-интегрально-дифференциальных законов управления. Сингулярно возмущенные задачи оптимального управления рассматривались многими авторами, при этом в большинстве работ применялся метод пограничных функций (см. работы [1-5]). В данной работе для анализа задачи оптимального слежения с сингулярными возмущениями применяется метод расщепления [6], основанный на применении аппарата интегральных многообразий быстрых и медленных движений [6-9]. Техника интегральных многообразий медленных движений применялась для анализа задач управления вообще и задач управления манипуляционными роботами, в частности, в работах [4,10], а в работе [11] метод расщепления [6] был эффективно применен для анализа специальной нелинейной задачи оптимального слежения.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального слежения для векторного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_2x = Bu, \qquad (1)$$

Здесь точка над переменной означает дифференцирование по времени t. Рассматривается случай, когда допускается применение ПИД-управления

$$u = -K_1x - K_2\dot{x} - K_3\int_0^{t_f} x(s)ds + k(t).$$

Пусть задана эталонная траектория $x = \xi(t)$. Вводятся обозначения

$$e_1(t) = x_1(t) - \xi_1(t), e_2(t) = x(t) - \xi(t), e_3(t) = \dot{x}(t) - \dot{\xi}(t),$$

где

$$x_1(t) = \int_0^{t_f} x(s)ds,\ \xi_1(t) = \int_0^{t_f} \xi(s)\,ds,$$

с учётом которых функционал качества может быть записан в следующем виде

$$J = \int_0^{t_f}[e_1^T(s)Q_1(s)e_1(s) + e_2^T(s)Q_2(s)e_2(s) + e_3^T(s)Q_3(s)e_3(s) + u^T(s)R(s)u(s)]ds. \qquad (2)$$

При известных естественных предположениях оптимальное управление задается следующей формулой [12]

$$u_{opt} = -R^{-1}\tilde{B}^T(PX + \chi). \qquad (3)$$

где матричная функция P и векторная функция χ являются решениями задач Коши для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21-11-00202, https://rscf.ru/project/21-11-00202/*

$$\dot{P} + PA + A^T P - P\tilde{S}P + Q = 0,\ P(t_f) = 0. \quad (4)$$

и сингулярно возмущенного линейного векторного уравнения

$$\dot{\chi} = -(A - \tilde{S}P)^T \chi + Q\Xi = 0,\ \chi(t_f) = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -\varepsilon^{-1}A_2 & -\varepsilon^{-1}A_1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon^{-1}B \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-2}S \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \varepsilon\chi_3 \end{pmatrix}, \ S = BR^{-1}B^T, \ P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \varepsilon P_4 \\ P_2^T & P_3 & \varepsilon P_5 \\ \varepsilon P_4^T & \varepsilon P_5^T & \varepsilon P_6 \end{pmatrix}, \ \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}.$$

2. Метод расщепления

Суть предлагаемого подхода состоит в следующем. При обычных предположениях о гладкости и нормальной гиперболичности быстрой подсистемы [6] сингулярно возмущенная система

$$\dot{X} = F(X, Y, t, \varepsilon), \ \varepsilon\dot{Y} = G(X, Y, t, \varepsilon)$$

приводится к виду

$$\dot{V} = F(V, L(V, t, \varepsilon)), \ \varepsilon\dot{Z} = W(V, Z, t, \varepsilon)\ (W(V, 0, t, \varepsilon) = 0) \quad (6)$$

при помощи преобразования

$$Y = Z + L(X, t, \varepsilon), \ X = V + \varepsilon\Pi(V, Z, t, \varepsilon) \quad (\Pi\ (V, 0, t, \varepsilon) = 0).$$

При этом первое уравнение в (6) не зависит от быстрой переменной, а решениями второго уравнения являются так называемые правые пограничные функции [1], для которых справедливы оценки типа

$$||Z(t, \varepsilon)|| \le C \exp\left(c(t - t_f)/\varepsilon\right), 0 \le t \le t_f$$

при не зависящих от малого параметра числах c и C $(0 < c, 1 \le C)$. При этом L соответствует медленному интегральному многообразию исходной системы, а Π — быстрому многообразию некоторой вспомогательной системы, переменная V соответствует регулярной составляющей решения исходной системы, а переменная Z — погранслойной составляющей. Важно отметить, что если $Z=O(\varepsilon)$ при $t = t_f$, то и функция Z содержит в качестве множителя малый параметр. Функции L и Π удовлетворяют так называемым *уравнениям инвариантности,* из которых могут быть найдены в виде разложений по степеням малого параметра. Для линейных систем применение соответствующего преобразования осуществляет блочную диагонализацию и приводит к двум независимым подсистемам для медленной и быстрой переменных.

3. Расщепление системы уравнений Риккати

Матричное дифференциальное уравнение Риккати, записанное для блоков матрицы P принимает вид системы матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{P}_1 = P_4 S P_4^T - Q_1 = F_1(P_4, t),$$

$$\dot{P}_2 = -P_1 + P_4 A_2 + P_4 S P_5^T = F_2(P_1, P_4, P_5, t),$$

$$\dot{P}_3 = -P_2^T - P_2 + P_5 A_2 + A_2^T P_5^T + P_5 S P_5^T - Q_2 = F_3(P_2, P_5, t),$$

$$\varepsilon\dot{P}_4 = -P_2 + P_4 A_1 + P_4 S P_6 = F_4(P_2, P_4, P_6, t),$$

$$\varepsilon\dot{P}_5 = -P_3 + P_5 A_1 + A_2^T P_6 - \varepsilon P_4 + P_5 S P_6 = F_5(P_3, P_4, P_5, P_6, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\dot{P}_6 = P_6 A_1 + A_1^T P_6 + P_6 S P_6 - \varepsilon(P_5 + P_5^T) - Q_3 = F_6(P_5, P_6, t, \varepsilon).$$

Положив малый параметр равным нулю в трех последних дифференциальных матричных уравнениях, получим матричные алгебраические уравнения

$$0 = -P_2 + P_4 A_1 + P_4 S P_6,$$

$$0 = -P_3 + P_5A_1 + A_2^TP_6 + P_5SP_6,$$
$$0 = P_6A_1 + A_1^TP_6 + P_6SP_6 - Q_3.$$

Предположим, что все матричные и векторные функции, которые фигурируют в постановке задачи, непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, t_f]$, при каждом пара $\{A_1, B\}$ вполне управляема, а пара $\{C, A_1\}$ — вполне наблюдаема ($C^TC = Q_3$).

Тогда последнее уравнение имеет единственное положительно определенное решение $P_6 = \Theta_0$ и у матрицы $D = A_1 + S\Theta_0$ все собственные числа имеют положительные вещественные части [1]. Отсюда следует, что остальные два уравнения, принимающие вид

$$0 = -P_2 + P_4D,$$
$$0 = -P_3 + A_2^T\Theta_0 + P_5D,$$

однозначно разрешимы и

$$P_4 = \Phi_0 = P_2D^{-1},\ P_5 = \Psi_0 = (P_3 - A_2^T\Theta_0)D^{-1}.$$

Система дифференциальных матричных уравнений Риккати в рассматриваемых условиях имеет медленное интегральное многообразие

$$P_4 = \Phi(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),\quad P_5 = \Psi(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),\ P_6 = \Theta(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),$$

движение на котором описывается системой уравнений

$$\dot{V}_1 = F_1(\Phi(V_1, V_2, V_3, t, \varepsilon), t), \tag{7}$$
$$\dot{V}_2 = F_2(V_1, \Phi(V_1, V_2, V_3, t, \varepsilon), \Psi(V_1, V_2, V_3, t, \varepsilon), t), \tag{8}$$
$$\dot{V}_3 = F_3(V_2, \Psi(V_1, V_2, V_3, t, \varepsilon), t), \tag{9}$$

Функции Φ, Ψ, Θ могут быть найдены в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра из уравнений инвариантности

$$\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial P_1}F_1(\Phi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial P_2}F_2(P_1, \Phi, \Psi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial P_3}F_3(P_2, \Psi, t) = F_4(P_2, \Phi, \Theta, t),$$
$$\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial P_1}F_1(\Phi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial P_2}F_2(P_1, \Phi, \Psi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial P_3}F_3(P_2, \Psi, t) = F_5(P_3, \Phi, \Psi, \Theta, t, \varepsilon),$$
$$\varepsilon\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\Theta}{\partial P_1}F_1(\Phi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Theta}{\partial P_2}F_2(P_1, \Phi, \Psi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Theta}{\partial P_3}F_3(P_2, \Psi, t) = F_6(\Psi, \Theta, t, \varepsilon).$$

Ограничиваясь первыми приближениями, получаем приближенные выражения

$$\Phi = P_2D^{-1} + \varepsilon\Phi_1, \Psi = (P_3 - A_2^T\Theta_0)D^{-1} + \varepsilon\Psi_1, \Theta = \Theta_0 + \varepsilon\Theta_1, \tag{10}$$

где Θ_1 определяется из уравнения Ляпунова $\Theta_1D + D^T\Theta_1 = \dot{\Theta}_0 + \Psi_0 + \Psi_0^T$, а для $\Phi_1,\ \Psi_1$ получаются явные выражения

$$\Phi_1 = \left[P_2\frac{\partial}{\partial t}\left(D^{-1}\right) + F_2(P_1, \Phi_0, \Psi_0, t)\right]D^{-1},\ \Psi_1 = [\frac{\partial}{\partial t}(A_2^T\Theta_0D^{-1}) + D^{-1}F_3(P_2, \Psi_0, t) - (A_2^T\Theta_1 - \Phi_0)]D^{-1}.$$

В результате замены переменных

$$P_4 = Z_4 + \Phi(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),\quad P_5 = Z_5 + \Psi(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),\ P_6 = Z_6 + \Theta(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon). \tag{11}$$

получаются следующие матричные дифференциальные уравнения для Z_4, Z_5, Z_6

$$\frac{dZ_4}{d\tau} = Z_4D + \Phi_0SZ_6 + Z_4SZ_6, \tag{12}$$
$$\frac{dZ_5}{d\tau} = Z_5D + A_2^TZ_6 + \Psi_0SZ_6 + Z_5SZ_6, \tag{13}$$
$$\frac{dZ_6}{d\tau} = Z_6D + D^TZ_6 + Z_6SZ_6. \tag{14}$$

В этих уравнениях опущены все члены, содержащие малый параметр в качестве множителя, роль независимого аргумента играет $\tau = (t - t_f)/\varepsilon$, аргумент t рассматривается как параметр, а граничные условия принимают следующий вид

$$Z_4(0) = 0,\ Z_5(0) = A_2^T(t_f)\Theta_0(t_f)D^{-1}(t_f),\ Z_6(0) = -\Theta_0(t_f). \tag{15}$$

Пусть X_0 – решение матричного уравнения Ляпунова

$$XD^T + DX + S = 0,$$

тогда, в соответствии с методом Васильевой [1,13],

$$Z_6 = \tilde{Z}_6(\tau) = \exp(D^T\tau)\,[\exp(D\tau)X_0\exp(D^T\tau) - X_0 - \Theta_0^{-1}\left(t_f\right)]^{-1}\exp(D\tau).$$

Через $\tilde{Z}_4(\tau), \tilde{Z}_5(\tau)$ обозначим решения уравнений (9),(10) с граничными условиями (15). Следует заметить, что после нахождения $Z_6 = \tilde{Z}_6(\tau)$ эти уравнения представляют собой линейные неоднородные матричные уравнения.

4. Расщепление линейной системы

Векторные переменные χ_1, χ_2, χ_3 являются решениями дифференциальной системы

$$\dot{\chi}_1 = P_4^T S\chi_3 + Q_1\xi_1,$$
$$\dot{\chi}_2 = -\chi_1 + \left(A_2^T + P_5^T S\right)\chi_3 + Q_2\xi,$$
$$\varepsilon\dot{\chi}_3 = -\chi_2 + (A_1^T + P_6 S)\chi_3 + Q_3\dot{\xi}.$$

Для построения медленного интегрального многообразия рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{\chi}_1 = \Phi^T S\chi_3 + Q_1\xi_1,$$
$$\dot{\chi}_2 = -\chi_1 + (A_2^T + \Psi^T S)\chi_3 + Q_2\xi,$$
$$\varepsilon\dot{\chi}_3 = -\chi_2 + (A_1^T + \Theta S)\chi_3 + Q_3\dot{\xi}.$$

Здесь матричные функции Φ, Ψ, Θ заданы формулами (331). Последняя система имеет медленное интегральное многообразие $\chi_3 = \phi(t,\varepsilon)\chi_1 + \psi(t,\varepsilon)\chi_2 + \eta(t,\varepsilon)$, движение на котором описывается системой векторных уравнений

$$\dot{v}_1 = \Phi^T S[\phi v_1 + \psi v_2 + \eta] + Q_1\xi_1,$$
$$\dot{v}_2 = -v_1 + (A_2^T + \Psi^T S)[\phi v_1 + \psi v_2 + \eta] + Q_2\xi,$$

где матричные функции $\phi(t,\varepsilon)$, $\psi(t,\varepsilon)$ и векторная функция $\eta(t,\varepsilon)$ находятся из *уравнения инвариантности*

$$\varepsilon\dot{\phi}\chi_1 + \varepsilon\dot{\psi}\chi_2 + \varepsilon\dot{\eta} + \varepsilon\,\phi[\Phi^T(\phi\chi_1 + \psi\chi_2 + \eta) + Q_1\xi_1] +$$
$$\varepsilon\,\psi[-\chi_1 + (A_2^T + \Psi^T)(\phi\chi_1 + \psi\chi_2 + \eta) + Q_2\xi] = -\chi_2 + (A_1^T + \Theta S)[\phi\chi_1 + \psi\chi_2 + \eta] + Q_3\dot{\xi}.$$

Принимая во внимание представление $A_1^T + \Theta S = D^T + \varepsilon\Theta_1 S$, находим

$$\phi = \varepsilon\phi_1 = \varepsilon D^{-T}(-\psi_0),$$
$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 = D^{-T} + \varepsilon D^{-T}\left[\dot{\psi}_0 + \psi_0(A_2^T + \Psi_0^T)\psi_0\right],$$
$$\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 = D^{-T}\left(-Q_3\dot{\xi}\right) + \varepsilon D^{-T}[\dot{\eta}_0 + \psi_0\left((A_2^T + \Psi_0^T)\eta_0 + Q_2\xi\right)].$$

Замена переменной $\chi_3 = z_3 + \phi(t,\varepsilon)\chi_1 + \psi(t,\varepsilon)\chi_2 + \eta(t,\varepsilon)$ приводит к независимому уравнению для z_3

$$\varepsilon\dot{z_3} = (D^T + \varepsilon\,\ldots)z_3$$

с граничным условиемМесто для формулы.

$$z_3|_{t=t_f} = -\phi\left(t_f,\varepsilon\right)\chi_1\left(t_f\right) - \psi\left(t_f,\varepsilon\right)\chi_2\left(t_f\right) - \eta\left(t_f,\varepsilon\right) = D^T\left(t_f\right)Q_3\left(t_f\right)\dot{\xi}\left(t_f\right) + \varepsilon\,\ldots\ .$$

Следуя методу Васильевой [1,13], рассмотрим *присоединённое уравнение*

$$\frac{dz_3}{d\tau} = D^T z_3,$$

в котором t рассматривается в качестве параметра и, следовательно, решение имеет вид

$$z_3 = \widetilde{z_3}(\tau) = \exp(D^T\tau)\,z_3(0),\ \ z_3(0) = D^T\left(t_f\right)Q_3\left(t_f\right)\dot{\xi}\left(t_f\right).$$

5. Субоптимальное управление

При построении субоптимального управления ограничимся вычислением регулярных составляющих решений до порядка $O(\varepsilon)$, включительно, и правых пограничных функций нулевого порядка. Результатом такого выбора будет погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества. Принимая во внимание представления

$$P_1 = V_1 + \varepsilon Z_1,\ P_2 = V_2 + \varepsilon Z_2,\ P_3 = V_3 + \varepsilon Z_3,$$
$$P_4 = V_4 + Z_4,\ P_5 = V_5 + Z_5,\ P_6 = V_6 + Z_6,$$
$$\chi_1 = v_1 + \varepsilon z_1,\ \chi_2 = v_2 + \varepsilon z_2,\ \chi_3 = v_3 + z_3,$$

Приходим к следующему выражению для субоптимального управления

$$u_{subopt} = -R^{-1}B^T[(V_4 + \tilde{Z}_4)x_1 + (V_5 + \tilde{Z}_5)x + (V_6 + \tilde{Z}_5)\dot{x} + v_3 + \tilde{z}_3],$$

где

$$V_4 = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1,\ V_5 = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1, V_6 = \Theta_0 + \varepsilon\Theta_1,\ v_3 = \varepsilon\phi_1 v_1 + (\psi_0 + \varepsilon\psi_1)v_2 + \eta_0 + \varepsilon\eta_1,$$

и при вычислении матричных функций, описывающих медленное интегральное многообразие системы уравнений Риккати, в соответствующих местах следует полагать $P_1 = V_1,\ P_2 = V_2,\ P_3 = V_3$. Здесь V_1, V_2, V_3 – решение системы уравнений Риккати (7)-(9) на медленном интегральном многообразии, в правых частях уравнений учитываются только члены нулевого и первого порядков при разложении по степеням малого параметра. Аналогичная ситуация с v_1, v_2.

6. Управление двухзвенным манипулятором

В качестве иллюстрации эффективности предлагаемого подхода рассматривается известная задача управления плоским движением двухзвенного манипулятора [14] с легкими звеньями. Предполагается, что звенья манипулятора представляют собой абсолютно жесткие стержни, которые соединены между собой и первое звено соединено с неподвижным основанием при помощи шарниров, оси которых параллельны. Манипулятор совершает движения в плоскости, которая перпендикулярна этим осям, под действием управляющих моментов, приложенных к осям шарниров. Уравнения движения манипулятора существенно упрощаются, если второе звено статически уравновешено [14]. Соответствующая система уравнений Риккати имеет медленную подсистему с десятью скалярными неизвестными и быструю подсистему с одиннадцатью неизвестными. Соответствующая линейная задача имеет четыре медленных и две быстрых скалярных неизвестных. В результате применения расщепляющего преобразования получается независимая медленная система уравнений десятого порядка для блоков матричного коэффициента усиления и линейная система четвертого порядка. Построено субоптимальное управление, которое приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества, что вполне приемлемо с прикладной точки зрения.

5. Заключение

Рассмотрена линейно-квадратичная задача слежения с заданной эталонной траекторией для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с применением пропорционально-интегрально-дифференциального управления. Показано, что применение аппарата асимптотического расщепления, основанного на теории быстрых и медленных интегральных многообразий, позволяет понизить размерность изучаемых задач. Особое внимание уделено анализу ситуаций, когда формулы для управляющих воздействий не содержат функций типа пограничного слоя.

Литература

1. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1982. – Т. 20. – С. 3-77.
2. *Дмитриев М.Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. и телемех. – 2006. N 1. – С. 3-51.
3. *Naidu D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms. – 2002. – Vol. 9, – P. 233–278.

4. *Kokotovic P.V.* Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O’Reily – N-Y: Academic Press, 1986. – 371 p.
5. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автомат. и телемех. – 2022. – N 11. – С. 3–61.
6. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. – 1984. . – Vol. 5. – P. 169-179.
7. *Mortell M.P.* Singular Perturbations and Hysteresis / M.P. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, V. Sobolev. – Philadelphia: SIAM, 2005. – 344 p.
8. *Shchepakina E.* Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M. Mortell. – Springer Lect. Notes in Math., 2014. – 212 p.
9. *Воропаева Н.В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В., Воропаева, В.А. Соболев. – М.: Физматлит, 2009. – 255 с.
10. *Ghorbel F., Spong M. W.* Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2000. – Vol. 35 – P. 133–155.
11. *Prasov A., Khalil H. K.* Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. – 2016. – Vol. 30: (8–10). – P. 1228–1243.
12. *Sontag E.* Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. – 2nd Ed. – N-Y: SpringerVerlag, 1998. – 544 p.
13. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор)) // Автомат. и телемех., 1997. – N 7. – С. 4–32.
14. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высш. шк., 1998. . – 574 с.