DOI: 10.25728/mlsd.2023.0618

ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СМЕНОЙ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Максимова И.С.
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Maximova_is@pfur.ru

Аннотация. В настоящей работе исследуется управляемость составной системой следующей структуры: на двух последовательных отрезках времени движение объекта описывается двумя нелинейными треугольными системами, которые путем замены переменных сводятся к линейным системам. Смена фазовых пространств осуществляется с помощью некоторого заданного отображения, с ним же связана и стыковка траекторий. В работе получены достаточные условия управляемости объекта, описанного заданной системой, из заданного начального множества одного пространства в заданное множество другого пространства. Предложен подход к нахождению траекторий, реализующих данное движение.

Ключевые слова: управляемость, полная управляемость, треугольные системы, составные системы.

Введение

Задачи со сменой фазового пространства являются подклассом так называемых составных (гибридных) систем. Характеризуются эти задачи тем, что на последовательных интервалах времени движение объекта описывается разными системами дифференциальных уравнений и некоторыми связями для стыковки траекторий.

Возникновение подобного рода задач изначально связано с исследованием многостадийных процессов космического полета [1]. Затем данный класс задач начали применять к физическим задачам запуска ракеты с управляемого объекта (подводного или надводного).

Задачами оптимизации составных систем занимались В.Г. Болтянский [2], Л.Т. Ащепков [3], В.Н. Розова [4], [5].

Однако, в указанных выше работах, изучается в основном вопрос оптимизации. Меж тем во всех типичных теоремах существования оптимального управления предполагается существование хотя бы одного допустимого управления, порождающего траекторию, удовлетворяющую заданным краевым условиям. Последнее и составляет суть задачи управляемости. Таким образом, проблема управляемости является важной и актуальной при решении задач оптимизации.

Задачи управляемости со сменой фазового пространства рассматривались автором в работах [6] - [8].

В настоящей работе рассмотрены нелинейные системы так называемого треугольного вида. Важной особенностью данного класса систем является то, что при определенной замене переменных они отображаются на линейные. Управляемость линейных систем хорошо изучена, что позволяет использовать различные критерии для их исследования. Треугольные системы описывают ряд физических процессов, таких как ориентация спутника на орбите, управление роботом-манипулятором и др. Впервые класс треугольных систем был введен и рассмотрен В.И. Коробовым [9].

В теории оптимального управления важную роль играют следующие две задачи: при каких условиях существует управление, переводящее систему из одного положение в другое на некотором отрезке времени и если такое управление существует, требуется найти его аналитическое представление.

Первая задача для линейных систем к настоящему моменту решена полностью. Получены многочисленные формы необходимых и достаточных условий существования управлений. Для нелинейных же систем задача управляемости далека от своего решения ввиду многообразия классов нелинейных систем и сложностей их описания.

Задача построения аналитического представления управления, переводящего систему из одной точки в другую, впервые была решена Калманом в [10], [11].

В настоящей работе для задачи управляемости со сменой фазового пространства, где на последовательных отрезках времени движение объекта описывается двумя нелинейными треугольными системами, получены условия управляемости объекта из начального множества одного пространства на конечное множество другого пространства. Также в работе получен явный вид траекторий, осуществляющих данный переход.

1. Постановка задачи

В двух фазовых пространствах $X=R^n$ и $Y=R^m$ переменных $x=(x_1,...,x_n)$ и $y=(y_1,...,y_m)$ движение управляемого объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}), \\ \qquad \dots \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n; u(t)), \end{cases} \tag{1}$$

$x \in X, t \in [0, \tau]$;

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dt} = g_k(y_1, \dots, y_{k+1}), \\ \qquad \dots \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, \dots, m-1 \\ \frac{dy_m}{dt} = g_m(y_1, \dots, y_m; v(t)), \end{cases} \tag{2}$$

$y \in Y, t \in [\tau, T]$.

Моменты времени τ и T заданы. В пространстве X задано начальное множество M_0 и гиперплоскость перехода $\Gamma=(x,c)$. Стыковка траекторий осуществляется с помощью заданного отображения $q\colon X \to Y$, $y(\tau)=q(x(\tau))$. Так же посредством этого отображения реализуется переход из одного пространства в другое. В пространстве Y задано конечное множество M_1.

Управляемый объект движется по следующей схеме: на отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется из начального множества M_0 по решениям системы (1), в момент времени τ объект попадает на Γ и происходит переход в пространство Y под действием отображения $q\colon X \to Y$, $y(\tau)=q(x(\tau))$. Полученная точка $y(\tau)$ является начальной для движения объекта в пространстве Y. Дальнейшее движение на отрезке времени $[\tau, T]$ объект осуществляет из точки $y(\tau)$ на множество M_1 по решениям системы (2). Причем $y(\tau) \notin M_1$ (в противном случае задача решена).

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), является управляемым на $[0, T]$ из множества M_0 пространства X на множество M_1 пространства Y.

Объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из M_0 в M_1, (см. [7]) если на отрезках $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ существуют допустимые управления $u(t)$ и $v(t)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau)=q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Условия управляемости объекта, описанного системами (1) и (2), можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема: Пусть в системах (1) и (2) функции $f_i(x_1, \cdots, x_{i+1})$, $i=1,...,n$ и $g_k(y_1, \cdots, y_{k+1})$, $k=1,...,m$ имеют непрерывные частные производные до $(n-i+1)$-го и $(m-k+1)$ - го порядков включительно и пусть

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geq a > 0, \text{ при всех } x_1, \cdots, x_{n+1},$$
$$\left|\frac{\partial g_k}{\partial y_{k+1}}\right| \geq b > 0, \text{ при всех } y_1, \cdots, y_{m+1},$$

где a и b - постоянные, не зависящие от $x_1,\dots,x_{n+1}$ и $y_1, \dots, y_{m+1}$ соответственно. И пусть выполнены условия стыковки траекторий $y(\tau)=q(x(\tau))$. Тогда объект, описанный системами (1) и (2) является управляемым из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y.

2. Исследование управляемости

Приведем схему доказательства полученной теоремы. Исследуем движение объекта в пространстве X из начального множества M_0 на гиперплоскость перехода Γ на отрезке времени $[0, \tau]$. Рассмотрим следующую задачу управляемости - выбрать управление u таким образом, чтобы попасть из точки

$x_0 \in M_0$ в точку $x_1 \in \Gamma$ по решениям системы (1). Приведем способ построения управления, решающего поставленную задачу.

Рассмотрим систему (1):

Введем замену переменных следующим образом:

$$z_1 = x_1 \equiv F_1(x_1),$$
$$z_i = \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_i} f_1(x_1, x_2) + \cdots + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_{i-1}} f_{i-1}(x_1, \dots, x_i) \equiv F_i(x_1, \dots, x_i), \; i = 2, \dots, n. \tag{3}$$

Через z_{n+1} обозначим новое управление

$$z_{n+1} = \frac{\partial F_n}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} f_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \tag{4}$$

После такой замены переменных система (1) приводится к виду

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, i = 1, \dots, n. \qquad (5)$$

Полученная линейная система (5) является полностью управляемой за время τ. Это следует из рангового критерия Калмана [11].

Напомним, что система уравнений называется полностью управляемой за время τ, если существует допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующая траектория системы соединяет любые заданные точки за время τ.

Поскольку $x_0 \in M_0$ - произвольная точка начального множества, а $x_1 \in \Gamma$ - произвольная точка на гиперплоскости перехода. В силу полной управляемости системы (5) существует допустимое управление, переводящее объект из точки x_0 в точку x_1 за время τ.

В системе (5) это новое управление z_{n+1} выберем в виде функции от времени t таким, чтобы за время τ попасть из точки

$$z(0) = (F_1(x_{10}), \dots, F_n(x_{10}, \dots, x_{n0}))^T \qquad (6)$$

в точку

$$z(\tau) = (F_1(x_{11}), \dots, F_n(x_{11}, \dots, x_{n1}))^T \qquad (7)$$

Управление z_{n+1}, например [12], можно выбрать в виде

$$z_{n+1}(t) = -b_0^T e^{-A_0^T t} N^{-1}(z_0 - e^{-A_0 \tau}),$$

где

$$N = \int_0^\tau e^{-A_0 t} b_0 b_0^T e^{-A_0^T t} dt.$$

Подставив в левые части соотношений (3) и (4) вместо z_i функции $z_i(t)$, $i=1, \dots, n+1$, из полученных равенств последовательно находим функции $x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)$. Действительно, первое равенство из формул (3) и (4) дает $x_1 \equiv F(x_1)=z_1(t)$. Если найдены функции $x_1(t), \dots, x_{i-1}(t)$ через $z_1(t),\dots, z_{i-1}(t)$ (пусть $x_j(t)=H_j(z_1(t), \dots, z_j(t))$, $j=1, \dots, i-1$), то функция $x_i(t)$ находится из i-го равенства соотношений (3) и (4):

$$F_i\big(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), x_i(t)\big) = z_i(t). \qquad (8)$$

Для разрешимости уравнения (8) достаточно установить, что

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i}, i=2,\dots,n+1 \qquad (9)$$

тогда $\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right| \geq a > 0$, а это значит, что функция $z_i=F_i(x_1, \dots, x_i)$ строго монотонна по x_i и при фиксированных значениях $x_1, \dots, x_{i-1}$ и изменении x_i непрерывно отображает интервал $(-\infty, +\infty)$ на интервал $(-\infty, +\infty)$, что означает однозначную разрешимость уравнения (8).

Соотношение (9) следует из формул (3) и (4), т.к.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, x_3)\right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

и т.д. Покажем, что функции $x_i(t)=H_i(z_1(t), \dots, z_n(t))$, $i=1, \dots, n$ удовлетворяют системе (1) при полученном управлении $x_{n+1}=H_{n+1}(z_1(t), \dots, z_{n+1}(t))$, которое измеримо, т.к. H_{n+1}, z_i, $i=1,\dots, n$ непрерывны от своих аргументов, а $z_{n+1}(t)$ непрерывна по t.

Из (3) имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial F_i(x_1(t),\dots,x_i(t))}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} \qquad (10)$$

Так как $\dot{z}_i = z_{n+1}(t) = F_{i+1}(x_1(t), \dots, x_{i+1}(t))$, то

$$\dot{z}_i = \frac{\partial F_i(x_1(t),\dots,x_i(t))}{\partial x_j} f_j(x_1(t), \dots, x_{j+1}(t)). \qquad (11)$$

Таким образом, равенства (10) и (11) дают

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial F_i(x_1(t),\dots,x_i(t))}{\partial x_j} \times \left(\frac{dx_j}{dt} - f_j(x_1(t), \dots, x_{j+1}(t))\right) = 0, \;\; i = 1, \dots, n. \qquad (12)$$

Определитель Δ полученной системы относительно

$$\frac{dx_j}{dt} - f_j\left(x_1(t), \dots, x_{j+1}(t)\right), j = 1, \dots, n$$

отличен от нуля, так как

$$\Delta = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)^{n-2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \neq 0.$$

Тогда из (12) вытекает, что

$$\frac{dx_j}{dt} - f_j(x_1(t), \ \dots, x_{j+1}(t)), j = 1, \dots, n,$$

так как где $x_{n+1}(t)=u(t)$. Так как траектория $z(t)$ проходит через точки (6), (7), то в силу однозначной разрешимости соотношения (3) относительно $x_1, \ \dots \ , x_n$, полученные функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям $x_i(0)=x_{i0}$, $x_i(\tau)=x_{i1}$, $i=1, \dots , n$.

После попадания объекта на гиперплоскость перехода Γ, осуществим переход в пространство Y с помощью отображения $q: X \to Y$ и получим начальную точку при движении объекта в пространстве Y $y(\tau)=q(x(\tau))$. Причем полученная точка не принадлежит конечному множеству $M_1 \in Y$.

Таким образом в пространстве Y получили следующую задачу: для объекта, движение которого описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dt} = g_k(y_1, \dots, y_{k+1}), \\ \qquad\dots \qquad\qquad\qquad k = 1, \dots, m-1, \\ \dfrac{dy_m}{dt} = g_m(y_1, \dots, y_m; v(t)), \end{cases} \tag{13}$$

$y \in Y, t \in [\tau, T]$ найти такое допустимое управление $v(t)$, что соответствующее ему решение системы (13) будет удовлетворять граничным условиям $y(\tau)=q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$. Аналогично пространству X введем замену переменных и сведем нелинейную систему к линейной.

$$z_1 = y_1 \equiv G_1(y_1),$$

$$z_k = \frac{\partial G_{k-1}}{\partial y_k} g_1(y_1, y_2) + \dots + \frac{\partial G_{k-1}}{\partial y_{k-1}} g_{k-1}(y_1, \dots, y_k) \equiv G_k(y_1, \dots, y_k), \ k = 2, \dots, m. \tag{14}$$

Через z_{m+1} обозначим новое управление

$$z_{m+1} = \frac{\partial G_m}{\partial y_1} g_1(y_1, y_2) + \dots + \frac{\partial G_m}{\partial y_m} g_m(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) \equiv G_{m+1}(y_1, \dots, y_k, y_{m+1}), \tag{15}$$

После такой замены переменных система (15) приводится к виду

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, k = 1, \dots , m. \tag{16}$$

Как и в предыдущем случае, система (16) в силу рангового критерия Калмана является полностью управляемой. То есть существует такое допустимое управление v, которое переводит объект, описанный данной системой, из любой точки в любую на отрезке времени $[\tau, T]$. В силу полной управляемости системы, в качестве начальной точки возьмем $y(\tau)$, а в качестве конечной - произвольную точку $y(T) \in M_1$. Найдем траекторию, соединяющие эти точки. В системе (16) выберем новое управление z_{m+1} в виде функции от времени t таким образом, чтобы за время T-τ попасть из точки

$$z(\tau) = (G_1(y_{10}), \dots , G_m(y_{10}, \dots, y_{m0}))^T \tag{17}$$

в точку

$$z(T) = (G_1(y_{11}), \dots , G_m(y_{11}, \dots, y_{m1}))^T \tag{18}$$

Управление z_{m+1} выберем в виде

$$z_{m+1}(t) = b_0^T e^{-C_0^T t} N^{-1}(z_T - e^{C_0(T-\tau)} z_\tau),$$

где

$$N = \int_\tau^T e^{C_0(T-t)} b_0 b_0^T \, e^{C_0(T-t)} dt.$$

Подставляя в левые части формул (14) и (15) вместо z_k функции $z_k(t)$, $k=1, \dots , m+1$, из полученных равенств последовательно находим функции $y_1(t), \ \dots \ , y_{m+1}(t)$. В силу однозначной разрешимости соотношения (14) (которая доказывается аналогично случаю, рассмотренному в пространстве X), полученные функции $y_1(t), \dots , y_{m+1}(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_k(\tau)=y_{k\tau}, \ y_k(T)=y_{kT}, \ k=1, \dots , m.$$

Таким образом, доказана управляемость объекта, описанного системами (1) и (2) из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0,T]$. Также явно получены уравнения траекторий, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Что и доказывает теорему.

3. Заключение

В работе исследована задача следующей структуры: на двух последовательных интервалах времени в разных фазовых пространствах заданы две нелинейные системы, и отображение, задающее переход из одного пространства в другое. В первом фазовом пространстве задано начальное множество, во втором – конечное. Для задачи изучена проблема управляемости и получены достаточные условия управляемости объекта, движение которого описывается данными системами, из начального множества одного пространства в конечное множество другого пространства. Данный класс систем в задачах со сменой фазового пространства ранее не рассматривался.

В силу того, что поставленная задача имеет прикладной характер, планируется ее дальнейшее развитие, т.е. рассмотрение других классов нелинейных систем, а также различных вариантов движения объектов.

Литература

1. *Величенко В.В.* О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автоматика и телемеханика. 1966. №7. – С. 20-30.
2. *Болтянский В.Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. XIX, №3. – С. 518-521.
3. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, №2. – С. 215-222.
4. *Медведев В.* А., Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами // Автоматика и телемеханика. 1972. №3. – С. 27-32.
5. *Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // Вестник РУДН. Серия: физико-математические науки. 2006. №3. – С. 15-23.
6. *Максимова И.С., Розова В.Н.* Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства // Вестник Тамбовского университета, Серия естественные и технические науки. 2011. Т. 3. – С. 742-747.
7. *Максимова И.С., Розова В.Н.* Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства // Вестник РУДН. Серия: физико-математические науки. 2017. Т.25. №4. – С. 331-338.
8. *Максимова И.С.* Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства // Таврический вестник информатики и математики. 2021. Т.2(51). – С. 53-64.
9. *Коробов В.И.* Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1973. Т.9, №4. – С. 614-619.
10. *Kalman R.E., Ho Y.C., Narendza K.S.* Controllability of linear dynamical systems // Contributions to Differential equations. 1962 Vol.1, №2 – P. 189-213.
11. *Kalman R.E.* Mathematical description of linear dynamical systems // SIAM J. Control. 1963. №1. – P. 152-192.
12. *Коробов В.И.* Метод функции управляемости. – М.: Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2007. – 567 с.