DOI: 10.25728/mlsd.2023.0613

О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕДИССИПАТИВНОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО НА НЕКОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

Лукацкий А.М.

Институт энергетических исследований Российской академии наук, Москва, Россия

macrolab@eriras.ru, lukatskii.a.m.math@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются модели крупномасштабных объектов, в которых наблюдается эффект недиссипативного кинематического динамо. Конструкция динамо строится для финитных бездивергентных векторных полей и диффеоморфизмов в n-мерном пространстве. Используется конструкция продолжения векторного поля с единичной сферы до бездивергентного финитного векторного поля в пространстве.

Ключевые слова: диффеоморфизм, векторное поле, сохраняющий элемент объема диффеоморфизм, бездивергентное векторное поде, действие диффеоморфизма, экспоненциальное раздутие векторного поля, недиссипативное кинематическое динамо.

Введение

Модели, в которых возникает кинематического динамо, связаны с крупномасштабными физическими объектами [1-5]. Пусть имеется ориентированное риманово многообразие D возможно с границей ∂D. Кинематическое динамо приводит к задаче построения пары из сохраняющего объем области D диффеоморфизма $F:D\to D$ и гладкого бездивергентного векторного поля v на D таких, что последовательное действие диффеоморфизма на векторное поле v вызывает показательный рост энергии у векторных полей. $(F_*)^n v$, получающихся в процессе итераций.

Одна из конструкций, позволяющая построить кинематическое динамо, связана с задачей продолжения произвольного диффеоморфизма, изотопного тождественному, границы области ∂D до сохраняющего объем диффеоморфизма области D. Проблема построения подобного продолжения была сформулирована Арнольдом [6]. Ранее автором была предложена конструкция продолжения для n-мерного шара B^n и полнотория T^n [7-8].

В настоящем докладе будет рассмотрено R^n. В случае некомпактного многообразия физический смысл имеют не общего вида бездивергентные векторные поля, а имеющие конечную кинетическую энергию и достаточно быстро стремящиеся к нулю на бесконечности. Ниже мы ограничимся финитными векторными полями.

1. Описание математической модели для построения эффекта кинематического динамо

Рассмотрим n-мерное пространство R^n с координатами $x_1,\dots,x_n$.

Нам понадобится единичная n-1 – мерная сфера $\mathrm{S}^{n-1}\subset \mathrm{R}^n$, заданная уравнением:

$$r^2=x_1^{\,2}+\ \dots+x_n^{\,2}=1. \tag{1}$$

Она ограничивает единичный шар в n-мерном пространстве, $\mathrm{B}^n\subset \mathrm{R}^n, \partial\mathrm{B}^n=\mathrm{S}^{n-1}$.

Мы ограничимся рассмотрением финитных (имеющих компактный носитель) векторных полей, в частности, это гарантирует соблюдение ограничений на рост векторного поля на бесконечности.

Для риманова многообразия D обозначим через $SVect_0(D)$ алгебру Ли бездивергентных финитных векторных полей на D. На $SVect_0(D)$ имеется положительно определенная билинейная форма – кинетическая энергия.

$$<u,v>=\int_D \big(u(x),v(x)\big)\,dx, \tag{2}$$

которая конечна для пары финитных векторных полей.

В [9] была предложена конструкция продолжения полиномиальных бездивергентных векторных полей на B^n до бездивергентных финитных векторных полей на R^n.

Общая схема построения недиссипативного кинематического динамо в R^n заключается в том, что используется действие конформной группы Ли $\mathrm{SO}(1,n+1)$ на единичной сфере $\mathrm{S}^{n-1} \subset \mathrm{R}^n$. Например, для n = 3 группа $\mathrm{SO}(1,4)$ является известной в специальной теории относительности группой Лоренца. Берется алгебра Ли $so(1,n+1)$ группы $\mathrm{SO}(1,n+1)$. Хотя векторные поля из $so(1,n+1)$ естественным образом продолжаются на R^n, их продолжения не являются ни бездивергентными, ни финитными.

Поэтому векторные поля из $so(1,n+1)$ продолжаются сначала до полиномиальных бездивергентных векторных полей внутрь единичного шара B^n, используя конструкцию [8]. После этого получившиеся полиномиальные бездивергентные поля с единичного шара B^n продолжаются до финитных бездивергентных векторных полей на R^n, используя конструкцию [9]. В итоговой конструкции для продолжения векторных полей предъявляются явные формулы.

Таким образом, недиссипативное кинематическое динамо удается получить с использованием коммутационных соотношений алгебры Ли $so(1,n+1)$, а также некоторых общих фактов теории кинематического динамо.

2. Техническая конструкция для построения эффекта кинематического динамо

Алгебру Ли $so(1,n+1)$ образуют векторные поля, являющиеся градиентами координатных функций в смысле стандартной римановой метрики на S^{n-1}:

$$e^i = \nabla_{\mathrm{S}^{n-1}} x_i \text{ с координатами } e^i{}_i = 1 - x_i{}^2, e^i{}_j = -x_i x_j, j \neq i, \tag{3}$$

а также векторные поля алгебры Ли $so(n+1)$ группы ортогональных преобразований $\mathrm{SO}(n+1)$:

$$h^{i,j}, i<j \text{ с координатами } h^{i,j}{}_i = x_j, h^{i,j}{}_j = -x_i. \tag{4}$$

Имеют место следующие коммутационные соотношения

$$[h^{i,j}, e^i] = e^j, [h^{i,j}, e^j] = -e^i, [e^j, e^i] = h^{i,j}. \tag{5}$$

Введем векторные поля

$$a = e^2 + h^{1,2}, b = e^1.$$

Для дальнейшего существенным будет коммутационное соотношение

$$[a, b] = b.$$

Векторные поля e^i не являются бездивергентными полями в шаре B^n, имеем

$$\operatorname{div} e^i = -(n+1)x_i.$$

Следуя [6], введем векторные поля

$$se^i \text{ с координатами } se^i{}_i = e^i{}_i + \frac{n+1}{2}(r^2-1), se^i{}_j = e^i{}_j, j \neq i. \tag{6}$$

Имеем

$$\operatorname{div} se^i = 0,$$
$$se^i \big| \mathrm{S}^{n-1} = e^i.$$

Утверждение 1.

Бездивергентные векторные поля $se^i, h_{i,j}$ на шаре B^n могут быть продолжены до финитных бездивергентных векторных полей на R^n.

Доказательство смотрите в приложении.

Обозначим финитные бездивергентные продолжения векторных полей $se^i, h_{i,j}$ на R^n через E^i, $H^{i,j}$.

Положим

$$A = E^2 + H^{1,2}, \; B = E^1.$$

Векторные поля A, B касаются подмногообразия $\mathrm{S}^{n-1} \subset \mathrm{R}^n$. На n-1 мерной сфере имеем

$$[\, A\big|\mathrm{S}^{n-1},\; B\big|\mathrm{S}^{n-1}\,] \overset{B}{=} B\big|\mathrm{S}^{n-1}.$$

B (7)

Обозначим через $\exp(tB),-$ поток векторного поля на R^n. В силу финитности векторного поля его поток определен для любого t. Таким образом, можно определить действие диффеоморфизмов этого потока на векторное поле A:

$$A^t = \exp(tB)_{\bullet}(A).$$

Известно [10], что

$$\frac{d}{dt}A^t\bigg|_{t=\tau} = [A^{\tau}, B].$$

Тогда на n-1- мерной сфере из (7) получаем

$$\frac{d}{dt}A^t\bigg|_{t=\tau}\Big|\mathrm{S}^{n-1} = A^{\tau}\Big|\mathrm{S}^{n-1}.$$

Отсюда следует, что

$$A^t\Big|S^{n-1} = \exp(t)A\Big|\mathrm{S}^{n-1}.$$

B

Таким образом, на S^{n-1} имеет место экспоненциальное раздутие векторного поля A при действии потоком векторного поля .

Если ввести сохраняющий элемент объема диффеоморфизм $F:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$.

$$F = \exp(B), \tag{8}$$

R^n

то на n-1 мерной единичной сфере $\mathrm{S}^{n-1} \subset \mathrm{R}^n$, являющейся инвариантной относительно действия диффеоморфизма F, для касательного к S^{n-1} финитного бездивергентного на векторного поля A имеет место эффект экспоненциального раздутия

$$(F_{\bullet})^n\, A\Big|\mathrm{S}^{n-1} = \exp(n)\, \overset{B}{A}\Big|\mathrm{S}^{n-1}. \tag{9}$$

Оказывается, что действие потока векторного поля на A дает не только экспоненциальное растяжение на подмногообразии. Справедливо

Утверждение 2.

Действие (9) диффеоморфизма F (8) является недиссипативным кинематическим динамо.

Доказательство смотрите в приложении.

R^n R^n

3. Заключение

Для финитных бездивергентных векторных полей на и сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов предложена конструкция недиссипативного кинематического динамо. В ней используются свойства действия группы конформных преобразований единичной сферы S^{n-1}(при n=3 группы Лоренца) , коммутационные соотношения ее алгебры Ли $so(1, n+1)$, а также продолжения

R^n

векторных полей из $so(1,n+1)$ до финитных бездивергентных векторных полей на . Единичная сфера S^{n-1} является инвариантной относительно действий диффеоморфизмов, используемых в рамках конструкции динамо. При этом на самой единичной сфере имеет место экспоненциальное раздутие бездивергентного векторного поля степенями сохраняющего элемент объема диффеоморфизма, участвующего в недиссипативном кинематическим динамо.

4. Приложение

Доказательство утверждения 1.

Ведем финитные функции:

$$g(t)=\begin{cases}1, t\le 1,\\ 0, t\ge 2\end{cases}$$

$$f(x_1,...,x_n)=g(x_1^{\,2}+\ ...\ +x_n^{\,2}), \tag{10}$$

а также, финитные векторные поля:

$$\begin{aligned}
&w^{k,i,j}(x_1,...,x_n), i\ne j, \text{ с координатами}\\
&w^{k,i,j}{}_i=kx_j^{\,k-1}\ f+2x_j^{\,k+1}\ f',\\
&w^{k,i,j}{}_j=-2x_i\ x_j^{\,k} f', w^{k,i,j}{}_l=0, l\ne i, j.\\
&v^{k,i,j}(x_1,...,x_n), i\ne j, \text{ с координатами}\\
&v^{k,i,j}{}_i=kx_i^{\,k}\ f+2x_i^{\,k}x_j^{\,2}\ f',\\
&v^{k,i,j}{}_j=-kx_i^{\,k-1}x_j f-2x_i^{\,k+1}\ x_j\ \ f', v^{k,i,j}{}_l=0, l\ne i, j.
\end{aligned} \tag{11}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\operatorname{div} w^{k,i,j}=0, \operatorname{div} v^{k,i,j}=0.$$

Обозначим редукцию построенных векторных полей на единичном шаре

$$w^{k,i,j}\Big|\mathrm{B}^n=sw^{k,i,j},\ v^{k,i,j}\Big|\mathrm{B}^n=sv^{k,i,j}. \tag{12}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&sw^{k,i,j}{}_j=x_i^{\,k-1},\ sw^{k,i,j}{}_l=0, l\ne j, k=1,2,...\\
&sv^{k,i,j}{}_i=x_i^{\,k},\ sv^{k,i,j}{}_j=-kx_i^{\,k-1}x_j, sv^{k,i,j}{}_l=0, l\ne i, j, k=1,2,....
\end{aligned}$$

Для векторных полей из $so(n+1)$ введем финитные векторные поля на R^n

$$H^{i,j}=f(r^2)h^{i,j}. \tag{13}$$

Очевидно,

$$\operatorname{div} H^{i,j}=0, H^{i,j}\Big|\mathrm{S}^{n-1}=h^{i,j}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\operatorname{div} w^{k,i,j}=0, \operatorname{div} v^{k,i,j}=0.$$

Дадим явную конструкцию продолжения векторных полей se^i до бездивергентных финитных векторных полей на R^n. Для этого приведем координаты векторных полей se^i .

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{s}e^{i}{}_{i} = \frac{n-1}{2}(x_i^{2}-1) + \frac{n+1}{2}\sum_{j\neq i} x_i^{2},\\
&se^{i}{}_{j} = -x_i\, x_j,\ j\neq i.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Из (3), (6) и (11) на единичном шаре B^n имеем

$$se^{i} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(s\,v^{2,i,j} + s\,w^{3,i,j} - s\,w^{1,i,j}\right). \tag{15}$$

Соответственно продолжением se^{i} до бездивергентного финитного векторного поля на R^n будет векторное поле

$$E^{\,i} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(v^{2,i,j} + w^{3,i,j} - w^{1,i,j}\right). \tag{16}$$

Доказательство утверждения 2.

У векторного поля B на единичной сфере имеются две особые точки $(\pm 1, 0, \ldots, 0)\in \mathrm{S}^{n-1}$. Рассмотрим поведение векторного поля B в окрестности особой точки

$$p = (1, 0, \ldots, 0)\in \mathrm{S}^{n-1}. \tag{17}$$

Линеаризация векторного поля B в точке p имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \begin{pmatrix} (n-1)x_1, (n+1)x_2, \ldots, (n+1)x_n \\ -x_2 \quad , -x_1 \quad , 0, \ldots, \ 0 \\ \ldots \\ -x_n \qquad\qquad\qquad -x_1 \\ . \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Отсюда получаем собственные значения линеаризации:

$$\lambda_1 = n-1, \lambda_2 = -1, \ldots, \lambda_n = -1.$$

Таким образом, у линеаризации (18) векторного поля B, поток которого включает диффеоморфизм F, в особой точке (17) имеется ровно одно положительное собственное значение. Тогда согласно теореме 1.7 из [5, с. 275], действие его потока является недиссипативным кинематическим динамо.

Литература

1. *Зельдович Я.Б.* Магнитные поля в астрофизике / Я.Б. Зельдович, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов. – Москва – Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.– 384 с.
2. *Гинес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В.* Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде // Современная математика. Фундаментальные направления . 2017. Т. 63. N 3. – С. 455–474.
3. *Жужома Е.В., Медведев С.В.* Недиссипативное кинематическое динамо на линзах // Журнал СВМО . 2017. Т. 19. N 2. – С. 53–59.
4. *Arshakian T., Beck R., Krause M., Sokoloff D.* Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // Astron. Astrophys. 2009. Vol. 494, N1. – p. 21 –32.
5. *Арнольд В.И.* Топологические методы в гидромеханике / В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.
6. *Арнольд В.И.* Задачи Арнольда / В.И. Арнольд. – М.: Фазис, 2000. . – 453 с.
7. *Лукацкий А.М.* О задаче продолжения диффеоморфизмов // Международная конференция "Анализ и особенности", посвященная 75-летию Владимира Игоревича Арнольда. Тезисы докладов. – М: МИАН, 2012. – С. 76–77.
8. *Лукацкий А.М.* О конструкции продолжения локальных бездивергентных векторных полей на R^n // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. N220. – С. 88–94.
9. *Lukatsky A.M.* A construction of diffeomorphism extension and its application // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. N204. – С. 130-134.
10. *Бишоп Р.* Геометрия многообразий / Р. Бишоп, Р. Критенден. – М.: Мир, 1967. – 335 с.