

# ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МОДЕЛИ ОДНОМАШИННОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ДЕЙСТВИЯ СИСТЕМНОГО СТАБИЛИЗАТОРА<sup>1</sup>

Кутяков Е.Ю., Катаев Д.Е.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия  
evgeniykutyakov@gmail.com, dekataev@ipu.ru

*Аннотация.* Представлены результаты построения квадратичной и кубической аппроксимаций для нелинейной одномашинной электроэнергетической системы в пространстве состояний. Модель синхронного генератора учитывает действие автоматического регулятора возбуждения и системного стабилизатора. Разработанные аппроксимации полезны при аналитических исследованиях нелинейных модальных взаимодействий энергосистем с линейным и билинейным управлением.

*Ключевые слова:* линеаризация Карлемана, нелинейные ЭЭС, пространство состояний, межрайонные колебания, билинейное управление.

## Введение

Многие задачи анализа нелинейных динамических систем в целом, и электроэнергетических систем в частности, могут быть успешно решены с использованием линеаризованных моделей. Вместе с тем, в практике электроэнергетики известны случаи, когда такой подход не даёт приемлемого результата. Межрайонные колебания, то есть низкочастотные электромеханические колебания между удалёнными друг от друга группами когерентных генераторов, являются наиболее ярким примером таких ситуаций, когда рассмотрения только линейной части недостаточно [1, 2]. Особенность этих колебаний заключается в том, что они проявляются при достаточно больших возмущениях. При этом рабочая точка, в окрестности которой выполняется линеаризация, обычно не изменяется, однако траектория, по которой нелинейная система возвращается в эту точку после прекращения возмущения, может существенно отличаться от траектории линеаризованной модели. Это обуславливает необходимость включения в исследуемую модель наряду с линейной частью, также и элементы более высокого порядка малости [3].

В литературе существует достаточно большое количество научных работ, посвящённых методам нелинейного анализа электроэнергетических систем. Первый класс объединяет методы, основанные на измерениях, наиболее популярным из которых является метод мод Купмана [4], [5]. Другой класс образуют методы, основанные на модели, где господствующим можно назвать метод нормальных форм Пуанкаре, спектр применения которого достаточно широк. Кроме задач анализа [6] и прогнозирования [7] межрайонных колебаний, метод нормальных форм показал хорошие результаты и в задачах настройки регуляторов систем возбуждения генераторов [8], оптимального расположения системных стабилизаторов [9], анализа устойчивости систем с возобновляемыми источниками энергии [10], исследования резонансов [11] и др.

Родственным к методу нормальных форм Пуанкаре является метод линеаризации Карлемана [12], [13], который заключается в расширении вектора переменных состояния исходной нелинейной модели за счёт включения в этот вектор произведений его первоначальных элементов в различных комбинациях. Его основной особенностью является возможность учёта не только нелинейности между переменными состояния, но и нелинейности между переменными состояния и входами системы (управлениями), то есть данный метод применим к классу билинейных динамических систем.

Несмотря на хорошо описанную теорию и широкое применение линеаризации Карлемана в различных задачах, готовые аппроксимационные модели ЭЭС либо программное обеспечение (ПО) для их получения в свободном доступе найти проблематично. Немногочисленные работы [14, 15], в которых использовались аппроксимированные с применением указанного метода модели энергосистем, не содержат подробного описания самих аппроксимаций. Вместе с тем, наличие последних (или соответствующего ПО) могло бы быть достаточно удобным в теоретических исследованиях, особенно на фоне сложившейся специфической практики в сфере электроэнергетики, где в научных исследованиях вместо реальных ЭЭС традиционно используются специально разработанные тестовые энергосистемы.

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект №19-19-00673)

Данная работа является продолжением серии публикаций авторов [16]-[17] в которых рассматривалась технология построения нелинейных аппроксимаций моделей ЭЭС без каких-либо устройств регулирования. Настоящее же исследование посвящено разработке квадратичной и кубической аппроксимации модели простейшей одномашинной тестовой энергосистемы, модель генератора которой включает в себя автоматический регулятор возбуждения с системным стабилизатором.

## 1. Метод линеаризации Карлемана для одномашинных ЭЭС

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в векторно-матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{H}(x, u, t) = f(x, t) + g(u, t), \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор переменных состояния;  $u \in \mathbb{R}^m$  – вектор входов (управлений);  $f(x, t) = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$  – аналитическая, вообще говоря, нелинейная вектор-функция векторного аргумента;  $g(u, t) = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n]^T$  – линейная вектор-функция векторного аргумента.

Пусть для системы (1) существует равновесная точка, т.е. пара  $\{x_0, u_0\}$  для которой  $\mathcal{H}(x_0, u_0, t) \equiv 0$ . Тогда динамика отклонения переменных состояния системы (1) от значений в равновесной точке может быть аппроксимирована полиномом Тейлора порядка  $p$ :

$$\frac{d(x-x_0)}{dt} = \Delta \dot{x} \approx \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{k!} \Delta x^{(k)} + B_1 \Delta u, \quad (2)$$

где  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta u = u - u_0$  – отклонение соответственно переменных состояния и управлений от значений в равновесной точке;  $\Delta x^{(k)} = \Delta x \otimes \dots \otimes \Delta x$  – кронекеровская степень порядка  $k$  вектора  $\Delta x$ ,

$\otimes$  – произведение Кронекера;  $B_1$  – матрица частных производных первого порядка (матрица Якоби) функции  $\mathcal{H}(x, u, t)$  по переменной  $u$  в равновесной точке  $\{x_0, u_0\}$ ;  $A_k$  – матрица частных производных порядка  $k$  функции  $\mathcal{H}(x, u, t)$  по переменной  $x$  в равновесной точке  $\{x_0, u_0\}$ , в частности, при  $k = 1$  это матрица Якоби, а при  $k \geq 2$  – матрица специального вида:

$$A_{k|k \geq 2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n e_n^i \otimes (e_n^i H_k(\mathcal{H}_1)) \\ \sum_{i=1}^n e_n^i \otimes (e_n^i H_k(\mathcal{H}_2)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n e_n^i \otimes (e_n^i H_k(\mathcal{H}_n)) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $e_n^i$  – вектор-строка из  $n$  элементов, состоящий из нулей с единицей на позиции  $i$ ;  $H_k(\mathcal{H}_i)$  – матрица Гессе порядка  $k$  функции  $\mathcal{H}_i(x, u, t)$  по переменной  $x$  в равновесной точке  $\{x_0, u_0\}$ .

Метод линеаризации Карлемана позволяет записать систему (2) в расширенном пространстве состояний, содержащем вместе с линейными переменными состояния (элементы вектора  $\Delta x$ ), также и нелинейные переменные (элементы вектора  $\Delta x^{[k]}$ ,  $k > 1$ ), в виде билинейного уравнения [12]:

$$\Delta \hat{x} = A \Delta \hat{x} + \sum_{q=1}^m N_q \Delta \hat{x} \Delta u_q + B \Delta u \quad (4)$$

Вектор  $\Delta \hat{x}$  и матрицы  $A$ ,  $N_j$  и  $B$  имеют следующую структуру:

$$\Delta \hat{x} = [\Delta x^{(1)} \ \Delta x^{(2)} \ \dots \ \Delta x^{(p)}]^T \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{A_2}{2!} & \dots & \frac{A_p}{p!} \\ 0 & A_{2,1} & \dots & A_{2,p-1} \\ 0 & 0 & \dots & A_{3,p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{p,1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$N_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{2,1,q} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_{p,1,q} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B = [B_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \quad (8)$$

где  $O$  – нулевая матрица.

Матрицы с двойной индексацией в (6) и (7) вычисляются следующим образом:

$$A_{ji} = \sum_{k=1}^j I \otimes I \otimes \dots \otimes \underbrace{A_i}_{\text{позиция } k} \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (9)$$

$$B_{j,1,q} = \sum_{k=1}^j I \otimes I \otimes \dots \otimes \underbrace{B_1^{(q)}}_{\text{позиция } k} \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (10)$$

где  $I$  – единичная матрица размером  $n \times n$ ;  $B_1^{(q)}$  –  $q$ -й столбец матрицы  $B_1$ .

## 2. Описание исходной нелинейной модели ЭЭС

Рассмотрим одномашинную компоновку электроэнергетической системы, состоящую из синхронного генератора, работающего на шину бесконечной мощности – см. Рис. 1. Генератор оснащён автоматическим регулятором напряжения цепи возбуждения тиристорного типа ST1A с системным стабилизатором (PSS). Схема системы возбуждения представлена на Рис. 2.

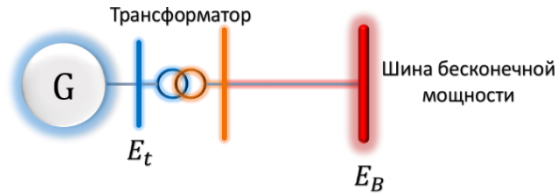


Рис. 1. Схема тестовой ЭЭС «генератор-бесконечная шина»

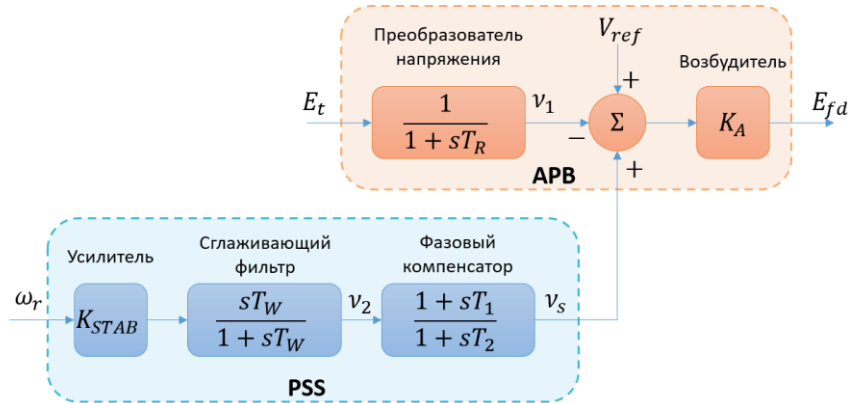


Рис. 2. Схема системы возбуждения синхронного генератора

Выберем в качестве пространства состояний набор следующих переменных:  $\Delta\omega_r$  – отклонение частоты вращения ротора генератора от номинального значения  $\omega_0$ ;  $\delta$  – угол поворота ротора генератора;  $\psi_{fd}$  – потокосцепление обмотки возбуждения;  $v_1$  – выход преобразователя напряжения;  $v_2$  – выход сглаживающего фильтра стабилизатора;  $v_s$  – выход фазокомпенсирующего блока стабилизатора. Механический крутящий момент  $T_m$  на роторе генератора и уставку  $V_{ref}$  автоматического регулятора возбуждения примем как входные сигналы. Тогда, уравнения динамики исследуемой ЭЭС могут быть записаны в следующем виде [18]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\dot{\omega}_r = -\frac{K_D\Delta\omega_r}{2H} - \frac{\psi_{ad}^i i_q - \psi_{aq}^i i_d}{2H} + \frac{T_m}{2H} \\ \dot{\delta} = \omega_0 \Delta\omega_r \\ \dot{\psi}_{fd} = -\omega_0 R_{fd} \left[ i_{fd} + \frac{K_A}{L_{ad}} (v_1 - v_s) \right] + \frac{\omega_0 R_{fd} K_A}{L_{ad}} V_{ref} \\ \dot{v}_1 = \frac{E_t - v_1}{T_R} \\ \dot{v}_2 = K_{STAB} \Delta\omega_r - \frac{v_2}{T_W} \\ \dot{v}_s = \frac{T_1 \dot{v}_2 + v_2 - v_s}{T_2} \end{array} \right. , \quad (11)$$

где  $K_D$  – коэффициент демпфирования;  $H$  – момент инерции вращающихся масс генератора;  $K_A$ ,  $K_{STAB}$  – коэффициенты усиления соответственно возбудителя и системного стабилизатора (PSS);  $T_R$  – постоянная времени преобразователя напряжения системы возбуждения;  $T_W$  – постоянная времени сглаживающего фильтра стабилизатора;  $T_1$ ,  $T_2$  – постоянные времени фазокомпенсирующего блока системного стабилизатора;  $i_{fd}$  – ток обмотки возбуждения:

$$i_{fd} = \frac{\psi_{fd} - \psi_{ad}}{L_{fd}}, \quad (12)$$

$L_{fd}$  – индуктивность обмотки возбуждения:

$$L_{fd} = \frac{L_{ad}(L'_d - L_l)}{L_d - L'_d} \quad (13)$$

$R_{fd}$  – сопротивление обмотки возбуждения:

$$R_{fd} = \frac{L_{ad}^2}{(L_d - L'_d)T'_{d0}\omega_0} \quad (14)$$

$E_t$  – напряжение на клеммах генератора:

$$E_t = \sqrt{e_d^2 + e_q^2}, \quad (15)$$

$e_d$ ,  $e_q$  – напряжение обмоток статора:

$$e_d = L_l i_q - R_a i_d - \psi_{aq}, \quad (16)$$

$$e_q = -L_l i_d - R_a i_q + \psi_{ad}, \quad (17)$$

$\psi_{ad}$ ,  $\psi_{aq}$  – взаимные потокосцепления в воздушном зазоре между обмоткой статора и обмотками ротора на d- и q-оси соответственно:

$$\psi_{ad} = \frac{L_{ads}L_{fd}}{L_{ads} + L_{fd}} \left( \frac{\psi_{fd}}{L_{fd}} - i_d \right) = L'_{ads} \left( \frac{\psi_{fd}}{L_{fd}} - i_d \right), \quad (18)$$

$$\psi_{aq} = -L_{aqs} i_q, \quad (19)$$

$i_d$ ,  $i_q$  – токи обмоток статора:

$$i_d = \frac{X_{Tq}}{K_{XR}} \left( L'_{ads} \frac{\psi_{fd}}{L_{fd}} - E_B \cos \delta \right) - \frac{R_T}{K_{XR}} E_B \sin \delta, \quad (20)$$

$$i_q = \frac{R_T}{K_{XR}} \left( L'_{ads} \frac{\psi_{fd}}{L_{fd}} - E_B \cos \delta \right) + \frac{X_{Td}}{K_{XR}} E_B \sin \delta, \quad (21)$$

$L_{ads}$ ,  $L_{aqs}$  – насыщенные значения взаимных индуктивностей между обмоткой статора и обмотками ротора на d- и q-оси соответственно:

$$L_{ads} = L_{ad} K_{sd}, \quad (22)$$

$$L_{aqs} = L_{aq} K_{sq}, \quad (23)$$

$L_{ad}$ ,  $L_{aq}$  – ненасыщенное значение взаимной индуктивности между обмоткой статора и обмотками ротора на d- и q-оси соответственно:

$$L_{ad} = L_d - L_l, \quad (24)$$

$$L_{aq} = L_q - L_l, \quad (25)$$

$L_d$ ,  $L_q$  – ненасыщенные значения собственных индуктивностей обмоток статора;  $L_l$  – индуктивность рассеяния статора;  $K_{sd}$ ,  $K_{sq}$  – коэффициенты насыщения по d- и q-оси соответственно;  $E_B$  – напряжение на шине бесконечной мощности;  $R_a$  – сопротивление статора;  $T'_{d0}$  – постоянная времени генератора;  $K_{XR}$ ,  $R_T$ ,  $X_{Td}$ ,  $X_{Tq}$  – вспомогательные коэффициенты, вычисляемые по формулам:

$$K_{XR} = R_T^2 + X_{Td} X_{Tq}, \quad (26)$$

$$R_T = R_a + R_E, \quad (27)$$

$$X_{Td} = X_E + L'_{ads} + L_l, \quad (28)$$

$$X_{Tq} = X_E + L_{aqs} + L_l, \quad (29)$$

где  $R_E, X_E$  – соответственно активное и реактивное сопротивление линии, соединяющей генератор с шиной бесконечной мощности.

### 3. Общая структура квадратичной и кубической аппроксимаций исходной нелинейной модели ЭЭС и процедура их построения

Основываясь на методе линеаризации Карлемана, описанном в разделе 1, квадратичную и кубическую аппроксимацию нелинейной модели (11) в отклонениях от рабочей точки и в выбранном в разделе 2 пространстве состояний можно записать в векторно-матричном виде следующим образом:

$$\Delta \dot{x}_{lq} = A_{lq} \Delta x_{lq} + N_{lq1} \Delta x_{lq} \Delta u_1 + N_{lq2} \Delta x_{lq} \Delta u_2 + B_{lq} \Delta u, \quad (30)$$

$$\Delta \dot{x}_{lqc} = A_{lqc} \Delta x_{lqc} + N_{lqc1} \Delta x_{lqc} \Delta u_1 + N_{lqc2} \Delta x_{lqc} \Delta u_2 + B_{lqc} \Delta u \quad (31)$$

В приведённом уравнении использованы следующие обозначения:

-  $\Delta x_{lq}^{[42 \times 1]}, \Delta x_{lqc}^{[258 \times 1]}$  – векторы отклонений переменных состояния соответственно квадратичной и кубической аппроксимации нелинейной модели (11) от рабочей точки  $\{x_0, u_0\}$ . Имеют следующую структуру:

$$\Delta x_{lq} = \left[ (\Delta x_l)^T \quad (\Delta x_l^{(2)})^T \right]^T, \quad (32)$$

$$\Delta x_{lqc} = \left[ (\Delta x_l)^T \quad (\Delta x_l^{(2)})^T \quad (\Delta x_l^{(3)})^T \right]^T \quad (33)$$

$$\Delta x_l = [\Delta \omega_r \quad \Delta \delta \quad \Delta \psi_{fd} \quad \Delta v_1 \quad \Delta v_2 \quad \Delta v_s]^T \quad (34)$$

-  $\Delta u^{[2 \times 1]}$  – вектор отклонения входных сигналов от рабочей точки  $\{x_0, u_0\}$ . Имеет следующую структуру:

$$\Delta u = [\Delta u_1 \quad \Delta u_2]^T = [\Delta T_m \quad \Delta V_{ref}]^T \quad (35)$$

-  $A_{lq}^{[42 \times 42]}, A_{lqc}^{[258 \times 258]}$  – матрицы динамики соответственно квадратичной и кубической аппроксимации нелинейной модели (11). Имеют следующую структуру:

$$A_{lq}^{[42 \times 42]} = \begin{bmatrix} A_1^{[6 \times 6]} & A_2^{[6 \times 36]} \\ O^{[36 \times 6]} & A_{2,1}^{[36 \times 36]} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$A_{lqc}^{[258 \times 258]} = \begin{bmatrix} A_{lq}^{[42 \times 42]} & \begin{bmatrix} A_3^{[6 \times 216]} \\ A_{2,2}^{[36 \times 216]} \end{bmatrix} \\ O^{[216 \times 42]} & A_{3,1}^{[216 \times 216]} \end{bmatrix} \quad (37)$$

-  $N_{lq1}^{[42 \times 42]}, N_{lq2}^{[42 \times 42]}, N_{lqc1}^{[258 \times 258]}, N_{lqc2}^{[258 \times 258]}$  – матрицы билинейных членов соответственно квадратичной и кубической аппроксимации нелинейной модели (11). Имеют следующую структуру:

$$N_{lq1}^{[42 \times 42]} = \begin{bmatrix} O^{[6 \times 42]} \\ [B_{2,1,1}^{[36 \times 6]} \quad O^{[36 \times 36]}] \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$N_{lq2}^{[42 \times 42]} = \begin{bmatrix} O^{[6 \times 42]} \\ [B_{2,1,2}^{[36 \times 6]} \quad O^{[36 \times 36]}] \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$N_{lqc1}^{[258 \times 258]} = \begin{bmatrix} N_{lq1}^{[42 \times 42]} & O^{[42 \times 216]} \\ [O^{[216 \times 6]} \quad B_{3,1,1}^{[216 \times 36]}] & O^{[216 \times 216]} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$N_{lqc2}^{[258 \times 258]} = \begin{bmatrix} N_{lq2}^{[42 \times 42]} & O^{[42 \times 216]} \\ [O^{[216 \times 6]} & B_{3,1,2}^{[216 \times 36]}] & O^{[216 \times 216]} \end{bmatrix} \quad (41)$$

-  $B_{lq}^{[42 \times 2]}$ ,  $B_{lqc}^{[258 \times 2]}$  – матрицы входов соответственно квадратичной и кубической аппроксимации нелинейной модели (11). Имеют следующую структуру:

$$B_{lq}^{[42 \times 2]} = \begin{bmatrix} B_1^{[6 \times 2]} \\ O^{[36 \times 2]} \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

$$B_{lqc}^{[258 \times 2]} = \begin{bmatrix} B_{lq}^{[42 \times 2]} \\ O^{[216 \times 2]} \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

Процедура построения приведённых выше аппроксимаций заключается в следующем. На первом этапе вычисляется равновесная точка  $\{x_0, u_0\}$  системы (11). Затем вычисляются матрицы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  частных производных системы (11) по переменным состояния, а также матрица  $B_1$  частных производных системы (11) по входам  $\Delta u_1$  и  $\Delta u_2$ . Все производные вычисляются в равновесной точке. Далее, на основании выражений (9)-(10) вычисляются матрицы  $A_{2,1}$ ,  $A_{2,2}$ ,  $A_{3,1}$ ,  $B_{2,1,1}$ ,  $B_{2,1,2}$ ,  $B_{3,1,1}$ ,  $B_{3,1,2}$  по следующим формулам:

$$A_{2,1} = A_1 \otimes I + I \otimes A_1 \quad (44)$$

$$A_{2,2} = A_2 \otimes I + I \otimes A_2 \quad (45)$$

$$A_{3,1} = A_1 \otimes I \otimes I + I \otimes A_1 \otimes I + I \otimes I \otimes A_1 \quad (46)$$

$$B_{2,1,1} = B_1^{(1)} \otimes I + I \otimes B_1^{(1)} \quad (47)$$

$$B_{2,1,2} = B_1^{(2)} \otimes I + I \otimes B_1^{(2)} \quad (48)$$

$$B_{3,1,1} = B_1^{(1)} \otimes I \otimes I + I \otimes B_1^{(1)} \otimes I + I \otimes I \otimes B_1^{(1)} \quad (49)$$

$$B_{3,1,2} = B_1^{(2)} \otimes I \otimes I + I \otimes B_1^{(2)} \otimes I + I \otimes I \otimes B_1^{(2)}, \quad (50)$$

после чего формируются векторы и матрицы уравнений (30)-(31) в соответствии с приведённой выше структурой (см. формулы (32)-(43)).

В рамках данного исследования описанная выше процедура реализована в виде пакета программ для среды MATLAB, размещённого на ресурсе GitHub [19]. В следующем разделе представлены результаты анализа, полученные с использованием указанного пакета.

#### 4. Анализ и верификация полученных аппроксимаций

Для демонстрации качественных свойств нелинейных аппроксимаций по сравнению с линеаризованной моделью рассмотрим систему (11) с параметрами, представленными в Таблице 1. В этом случае рабочая точка будет характеризоваться значениями переменных состояния и входов, приведённых в Таблице 2.

Таблица 1. Параметры исследуемой ЭЭС

$\omega_0$ , [Гц]	60	$R_a$ , [о.е.]	0.003	$X_E$ , [о.е.]	0.65	$T_R$ , [с]	0.02
$X_d$ , [о.е.]	1.81	$X_l$ , [о.е.]	0.16	$P$ , [о.е.]	0.9	$K_{STAB}$ , [о.е.]	9.5
$X'_d$ , [о.е.]	0.3	$H$ , [МВт · с/МВА]	3.5	$Q$ , [о.е.]	0.3	$T_W$ , [о.е.]	1.4
$X_q$ , [о.е.]	1.76	$K_D, R_E$ , [о.е.]	0	$E_t$ , [о.е.]	1.0	$T_1$ , [с]	0.154
$T'_{d0}$ , [с]	8	$K_{sd}, K_{sq}$ , [о.е.]	0.8491	$K_A$ , [о.е.]	200	$T_2$ , [с]	0.033

Таблица 2. Значения переменных состояния и входов в рабочей точке<sup>2</sup>

$\Delta \omega_r$ , [о.е.]	$\delta$ , [рад]	$\psi_{fd}$ , [о.е.]	$v_1$ , [о.е.]	$v_2$ , [о.е.]	$v_s$ , [о.е.]	$T_m$ , [о.е.]	$V_{ref}$ , [о.е.]
0	1.3811	1.0867	1	0	0	0.9027	1.0120

<sup>2</sup> При расчёте рабочей точки предполагалось, что все индуктивности равны соответствующим реактивным сопротивлениям, т.е.  $L_d = X_d$ ,  $L'_d = X'_d$ ,  $L_q = X_q$ ,  $L_l = X_l$

Рассмотрим динамику отклонений переменных состояния от рабочей точки  $\{x_0, u_0\}$  при различных видах возмущений. Так, на Рис. 3 слева представлены динамические отклики по углу поворота ротора  $\Delta\delta$  при отклонении механического крутящего момента в интервале времени от 1 с до 1.1 с на величину  $\Delta T_m = 0.4$  о.е.,  $\Delta T_m = 0.8$  о.е. и  $\Delta T_m = 1.2$  о.е., а на Рис. 3 справа – аналогичные отклики при отклонении уставки регулятора  $\Delta V_{ref}$ . Видно, что по мере увеличения возмущения влияние нелинейных эффектов в системе возрастает, что визуально проявляется в виде разделения кривых линейной, квадратичной и кубической аппроксимаций. Аналогичное поведение наблюдается и для других физических величин, характеризующих режим работы энергосистемы. Например, на Рис. 4 представлены реакции напряжения на клеммах генератора.

Общий характер зависимости между величинами входных возмущений и отклонениями аппроксимаций от исходной нелинейной модели представлен на Рис. 5 и Рис. 6. Величина ошибки определялась следующим образом:

$$err_y = \int_0^{\infty} (y_{nl}(t) - y_0 - y_{apr}(t))^2 dt, \quad (51)$$

где  $y_{nl}(t)$  – динамический отклик нелинейной системы (11) по параметру  $y$ ;  $y_0$  – значение параметра  $y$  в рабочей точке;  $y_{apr}(t)$  – динамический отклик соответствующей аппроксимации по  $y$ .

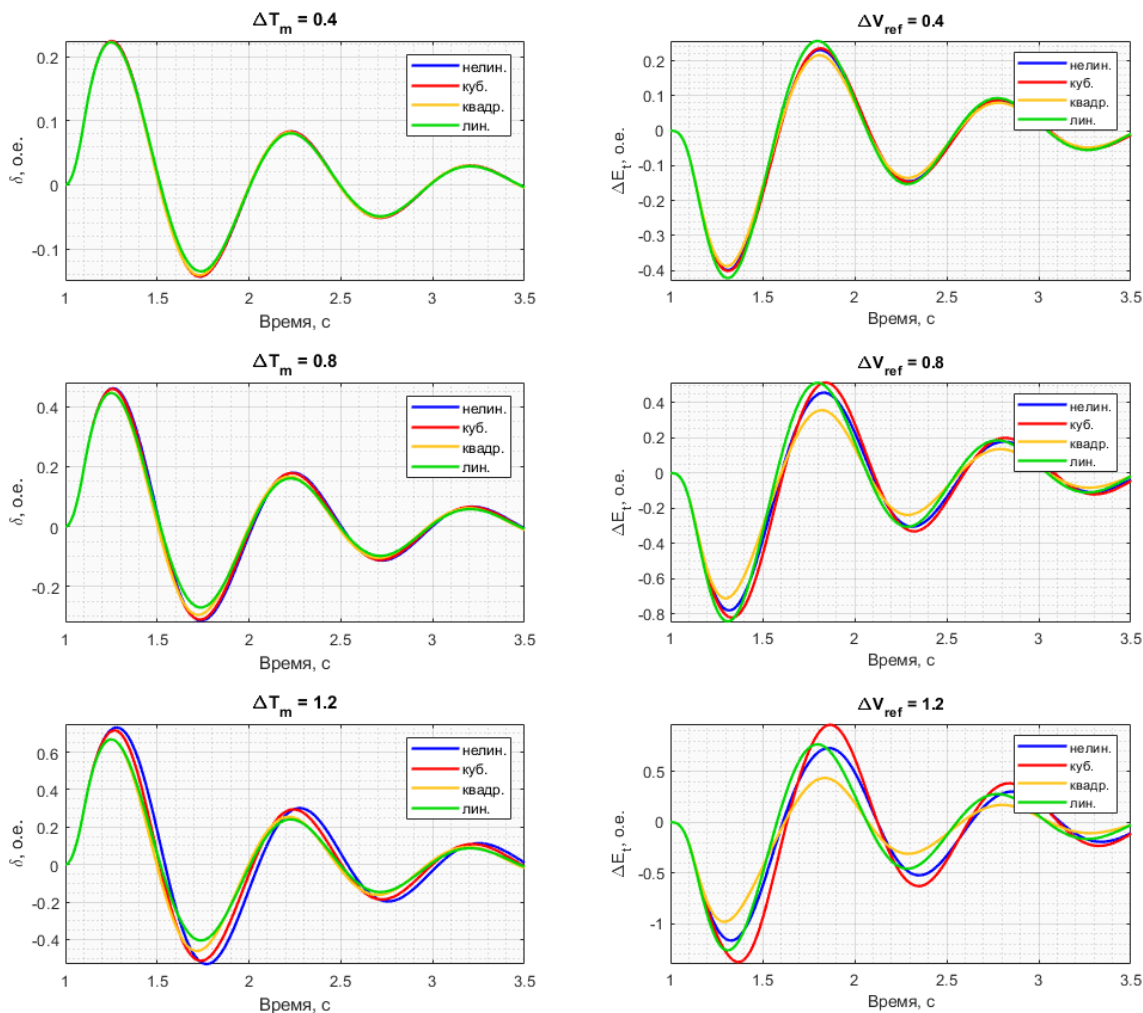


Рис. 3. Динамические отклики по углу  $\Delta\delta$  поворота ротора генератора при отклонении механического крутящего момента (левый столбец графиков) и уставки регулятора (правый столбец графиков) от значений в рабочей точке

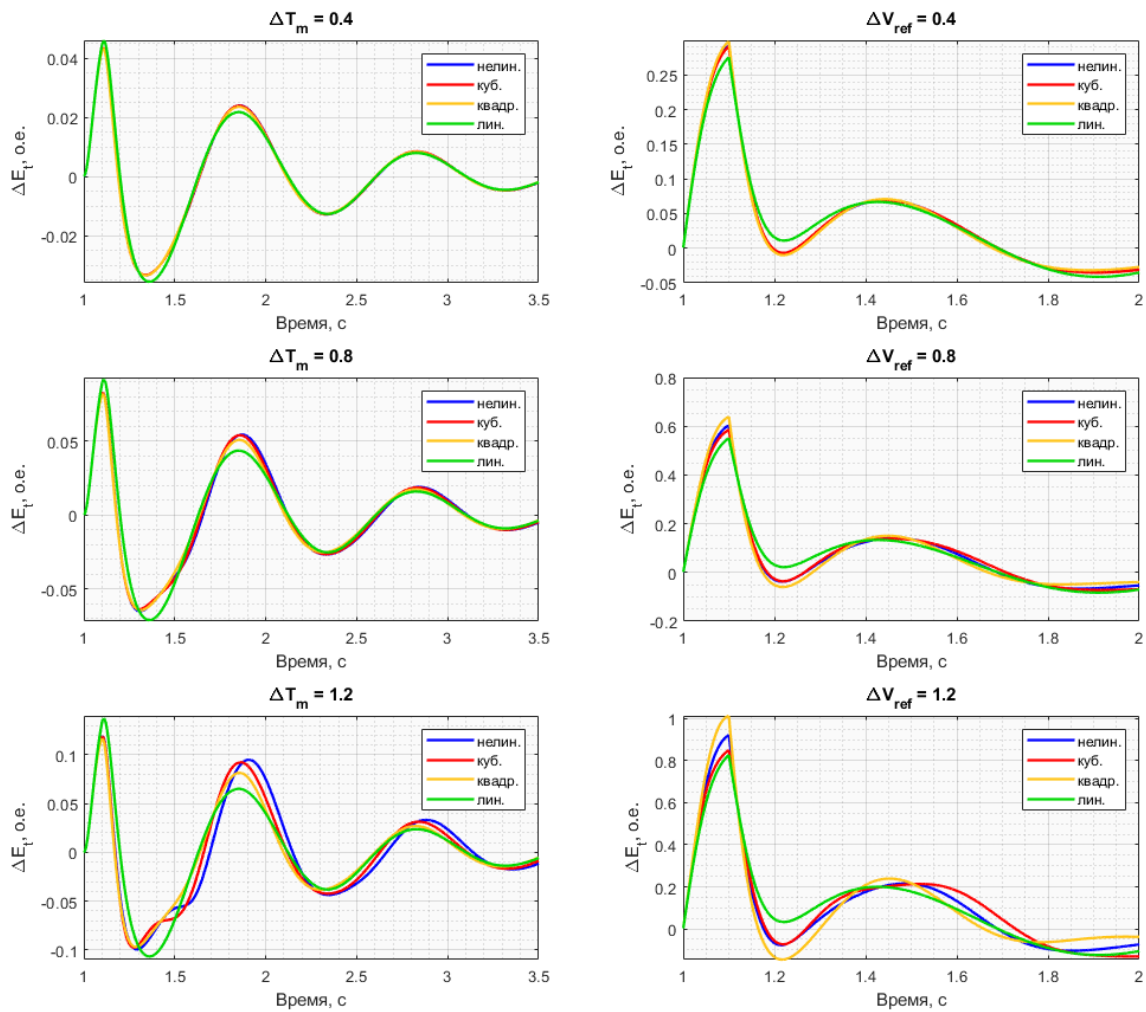


Рис. 4. Динамические отклики по напряжению  $E_T$  на клеммах генератора при отклонении механического крутящего момента (левый столбец графиков) и уставки регулятора (правый столбец графиков) от значений в рабочей точке

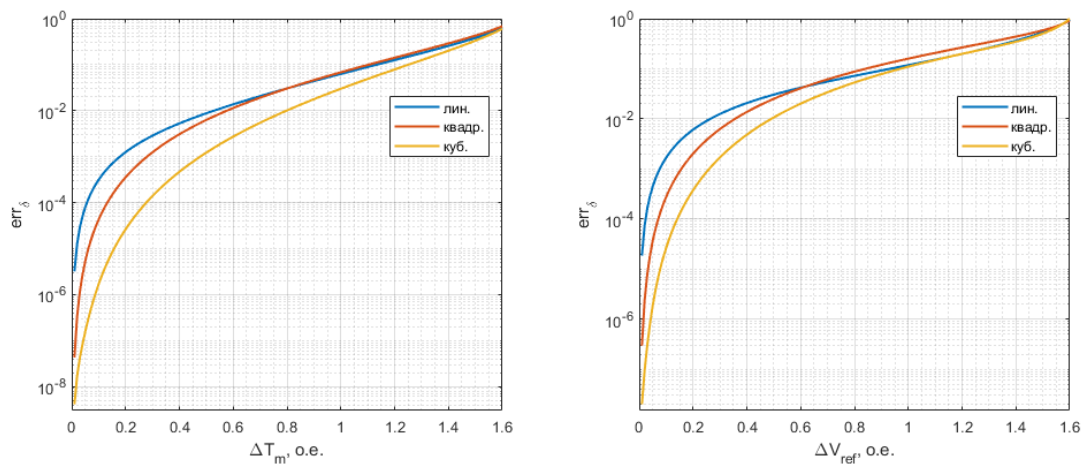


Рис. 5. Зависимость ошибок аппроксимаций от величины возмущающих воздействий для угла поворота ротора генератора

Из Рис. 5 следует, что при рассматриваемых параметрах исходной модели ЭЭС, её квадратичная аппроксимация отрабатывает по углу поворота ротора ( $\delta$ ) с меньшей ошибкой, чем линейная, но только при отклонении механической мощности на величину не более  $\Delta T_m = 0.8$  о.е. от значения в рабочей точке. При бóльших значениях отклонения указанного параметра учёт нелинейностей второго порядка для наблюдения угла  $\delta$  не даёт каких-либо значимых качественных преимуществ по



сравнению с линеаризованной системой. Кубическая же аппроксимация работает с наименьшей ошибкой почти во всём устойчивом диапазоне возмущений механической мощности, то есть вплоть до возмущений, величиной около  $\Delta T_m = 1.6$  о.е., когда нелинейная модель системы переходит в новую рабочую точку и любая аппроксимация в прежней точке теряет смысл.

Аналогичное поведение по углу поворота ротора наблюдается и при возмущении через уставку регулятора напряжения, с тем лишь отличием, что квадратичная система работает точнее, чем линейная, только при возмущениях, величиной до  $\Delta V_{ref} = 0.6$  о.е., а при возмущении более  $\Delta V_{ref} = 1$  о.е. все три аппроксимации дают почти одинаковую ошибку.

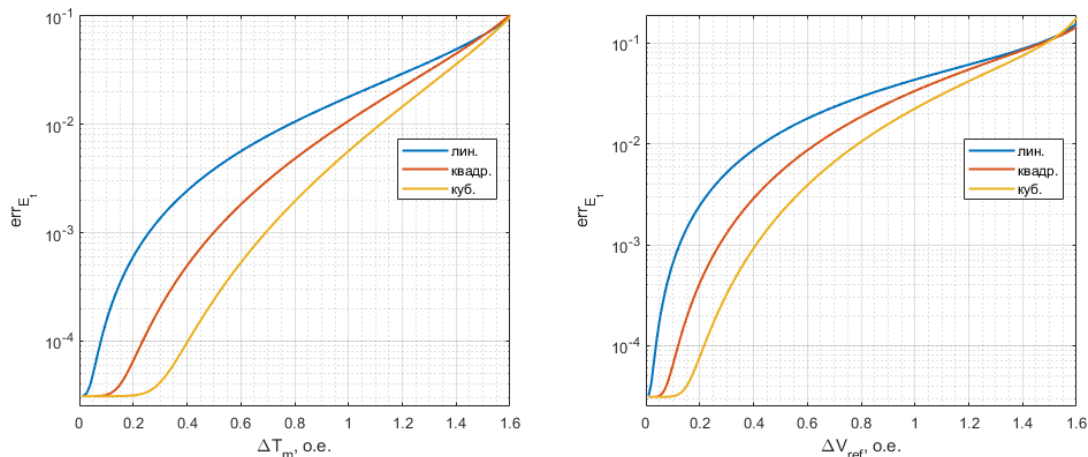


Рис. 6. Зависимость ошибок аппроксимаций от величины возмущающих воздействий для напряжения на клеммах генератора

При анализе характера изменения ошибки аппроксимации по напряжению на клеммах генератора (см. Рис. 6) необходимо указать, что квадратичное приближение во всём устойчивом диапазоне возмущений демонстрирует меньшую ошибку, чем линейное, а кубическое – меньшую, чем квадратичное. Такое поведение справедливо как при возмущении через механическую мощность, так и при возмущении через уставку регулятора. При этом в первом случае характерной особенностью является наличие ярко выраженной «полки», когда ошибка почти не меняется при увеличении возмущения. У кубической аппроксимации протяжённость этого участка наибольшая и достигает значений около  $\Delta T_m = 0.2$  о.е., что составляет 22% от значения  $T_m$  в рабочей точке.

## 5. Заключение

В работе представлено подробное описание структуры квадратичной и кубической аппроксимации нелинейной модели ЭЭС типа «генератор-бесконечная шина» в пространстве состояний, что является основным результатом исследования. Кроме этого, кратко изложена процедура построения таких аппроксимаций с использованием метода линеаризации Карлемана, а также разработано специальное программное обеспечение для вычисления матриц соответствующих динамических систем. В ходе вычислительных экспериментов определены границы применимости построенных аппроксимаций по величинам входных возмущений, а также показано, что по сравнению с линейным приближением учёт нелинейностей второго и третьего порядка повышает точность анализа исследуемой ЭЭС во временной области даже при рассматриваемой простейшей одномашинной компоновке.

Разработанные в рамках данного исследования аппроксимации могут использоваться как в качестве самостоятельных тестовых систем при анализе нелинейных эффектов, возникающих между отдельным генератором и остальной энергосистемой, так и в качестве «строительного блока» при разработке аналогичных аппроксимаций для моделей крупных многомашинных ЭЭС. Последнее, в частности, является предметом дальнейших исследований авторов.

## Литература

1. *Abed E.H., Varaiya P.P.* Nonlinear oscillations in power systems // *Electric Power Energy System.* – 1984. – Vol. 6, No. 1. – P. 37–43.

2. *Winkelman J.R., Chow J.H., Bowler B.C., Avramovic' B., Kokotovic' P.V.* An analysis of interarea dynamics of multi-machine systems // *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems.* – 1981. – Vol. PAS-100, No. 2. – P. 754–763.
3. *Sanchez-Gasca J.J., Vittal V., Gibbard M.J., Messina A.R., Vowles D.J., Liu S., Annakkage U.D.* Inclusion of higher order terms for small-signal (modal) analysis: committee report-task force on assessing the need to include higher order terms for small-signal (modal) analysis // *IEEE Trans. on Power Systems.* – 2005. – Vol.20, No. 4. – P. 1886–1904.
4. *Barocio E., Pal B.C., Thornhill N.F., Messina A.R.* A dynamic mode decomposition framework for global power system oscillation analysis // *IEEE Trans. on Power Systems.* – 2015. – Vol. 30, No. 6. – P. 2902–2912.
5. *Susuki Y., Mezić' I.* Nonlinear Koopman modes and coherency identification of coupled swing dynamics // *IEEE Trans. on Power Systems.* – 2011. – Vol. 26, No. 4. – P. 1894–1904
6. *Vittal V., Kliemann W., Starrett S.K., Fouad A.A.* Analysis of stressed power systems using normal forms // *Proc. of the IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, San Diego, CA, USA.* – 1992. – P. 2553–2556.
7. *Thapar J., Vittal V., Kliemann W., Fouad A.A.* Application of the normal form of vector fields to predict interarea separation in power systems // *IEEE Trans. on Power Systems.* – 1997. – Vol. 12, No. 2. – P. 844–850.
8. *Lomei H., Assili M., Sutanto D., Muttaqi K.M.* A new approach to reduce the nonlinear characteristics of a stressed power system by using the normal form technique in the control design of the excitation system // *IEEE Trans. on Industry Applications.* – 2017. –Vol. 53, No. 1. – P. 492–500.
9. *Liu S., Messina A.R., Vittal V.* A normal form analysis approach to siting power system stabilizers (PSSs) and assessing power system nonlinear behavior // *IEEE Trans. on Power Systems.* – 2006. –Vol. 21, No. 4. – P. 1755–1762.
10. *Amano H., Yokoyama A.* Rotor angle stability analysis using normal form method with high penetrations of renewable energy sources-energy index for multi-swing stability // *Proc. of the 20th Power Systems Computation Conference (PSCC-2018), Dublin.* – 2018. –P. 1–6.
11. *Betancourt R.J., Barocio E., Arroyo J., Messina A.R.* A real normal form approach to the study of resonant power systems // *IEEE Trans. on Power Systems.* – 2006. – Vol. 21, No. 1. – P. 431–432.
12. *Rugh W.J.* *Nonlinear System Theory. The Volterra/Wiener Approach.* – Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981. – 344 p.
13. *Tsiligiannis C.A., Lyberatos G.* Normal forms, resonance and bifurcation analysis via the Carleman linearization // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 1989. – Vol. 139, No. 1. –P. 123–138.
14. *Arroyo J., Barocio E., Betancourt R., Messina A.R.* A bilinear analysis technique for detection and quantification of nonlinear modal interaction in power systems // *Proc. of the IEEE Power Engineering Society General Meeting, Montreal, Canada.* – 2006. – P. 1–10.
15. *Arroyo J., Betancourt R., Messina A.R., Barocio E.* Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis // *Electric Power Systems Research.* – 2007. – Vol. 77. – P. 1239–1248.
16. *Kutyakov E. Y., Dushin S. V., Abramnikov A.N., Iskakov A. B., Salnikov A. M.* Quadratic approximation of nonlinear models of the synchronous machine using the bilinear representation // *Proceedings of the 13th International Conference «Management of Large-Scale System Development» (MLSD), – Moscow: IEEE, 2020.* – P. 1–5.
17. *Кутяков Е.Ю.* Построение и анализ квадратичной аппроксимации нелинейной модели двухрайонной электроэнергетической системы в пространстве состояний // *Управление большими системами. Выпуск 100.* М.: ИПУ РАН, 2022. С.119-151.
18. *Kundur P.* *Power Systems Stability and Control.* – New York: McGraw-Hill, Inc., 1994. – 1176 p.
19. <https://github.com/e-kut/Bilinear-Electric-Power-System-Models> (дата обращения: 06.06.2023).