

МНОГОМЕРНЫЙ ХАОС, ИНИЦИИРОВАННЫЙ АДАПТИВНЫМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ, В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ¹

Крылосова Д.А.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

Саратов, Россия

krylosovadarina@gmail.com

Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Станкевич Н.В.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

Саратов, Россия

apkuz@rumbler.ru, sedovayv@yandex.ru, stankevichnv@mail.ru

Аннотация. Исследован генератор квазипериодических колебаний под периодическим гармоническим воздействием, обладающим свойством адаптивности, в том смысле, что частоты внешнего сигнала имеет линейную зависимость от динамической переменной генератора. Показано, что учет адаптивности внешнего воздействия приводит к разрушению квазипериодических колебаний и формированию хаоса с различным спектром показателей Ляпунова. Также в системе наблюдается мультистабильность между различными, в том числе хаотическими режимами.

Ключевые слова: Неавтономный осциллятор, фаза, автономный генератор квазипериодических колебаний, хаос, мультистабильность.

1. Введение

В природе и технике часто встречаются ситуации, когда внешнее воздействие на систему зависит не только от времени, но и от состояния самой системы. Это характерный пример наличия обратной связи. Примерами в радиотехнике и задачах коммуникации могут служить системы фазовой автоподстройки частоты [1-5]. В биологии система сердечно-сосудистой регуляции живых организмов при изменении нагрузки увеличивает или уменьшает частоту сердцебиений [6,7]. Подобные ситуации характерны и для нейродинамики. Они могут быть охарактеризованы, как адаптивные свойства системы, когда воздействие на нее управляется динамикой самой системы.

В качестве простейшего объекта для подобного изучения могут выступать динамические системы при внешнем воздействии в случае, когда фаза воздействия зависит от динамической переменной. При этом автономная система, подвергаемая воздействию, может быть разного типа и демонстрировать различное поведение. Ранее в работах [8-11] были изучены случаи, когда внешнее воздействие подавалась на диссипативный осциллятор, а также на автоколебательную систему. При этом базовые автономные системы в этом случае имели двумерное фазовое пространство и демонстрировали или устойчивое состояние равновесия или устойчивый предельный.

Увеличение размерности рассматриваемой модели создает возможность к усложнению поведения системы, возникновению многочастотных квазипериодических колебаний и многомерного хаоса. В качестве такой модели можно рассмотреть простейший вариант трехмерной системы, полученной обобщением системы типа осциллятора ван дер Поля и имеющей единственное состояние равновесия [22,23]. При этом данная модель помимо периодических автоколебаний способна демонстрировать квазипериодические и хаотические колебания в автономном режиме. Если говорить о радиофизике, известно несколько примеров таких систем – квазипериодических генераторов [15-23].

В рамках данной работы мы рассмотрим особенности поведения квазипериодического генератора в режиме автономных квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием. Особое внимание мы уделим нелинейным эффектам, проявляющимся за счет учета свойства адаптивности внешнего воздействия, таким как разрушение квазипериодических колебаний и возбуждение хаоса, а также мультистабильность.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы представим объект исследования - краткое описание модели, и методы, которые будем использовать для ее исследования. В разделе 3 мы опишем поведение системы при подаче на нее периодического гармонического воздействия без учета адаптивности. В разделе 4 мы обсудим особенности, возникающие при учете адаптивности системы. Особое внимание будет уделено разнообразным хаотическим аттракторам, возникающим в результате

¹ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

учета адаптивности. В разделе 5 мы опишем мультистабильность в системе, которая также возникает в результате учета адаптивности внешнего воздействия.

2. Объект исследования: генератор квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием

В качестве объекта исследования в рамках данной работы мы будем рассматривать автономный генератор квазипериодических колебаний с единственным состоянием равновесия, предложенный в [12-14,25], уравнения которого имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu \dot{x}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Модель представляет собой осциллятор типа ван дер Поля, с дополнительной переменной z , которая управляется вторым уравнением. Система (1) может быть приведена к стандартному виду в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu y^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1,2) λ – управляющий параметр генератора, а ω_0 – частотный параметр. Остальные параметры выбираем аналогично [22,23]: $\varepsilon=4$, $b=1$, $\mu=0.02$, $\beta=1/18$, $\lambda=-1$. При таком выборе параметров система (1) может демонстрировать как периодические, так и квазипериодические колебания в зависимости от значения частоты ω_0 . Мы выберем случай, когда $\omega_0=2\pi$, что отвечает квазипериодическим колебаниям автономной системы. На рис.1 показан фазовый портрет в этом случае, который представляет собой гладкий устойчивый инвариантный тор. Также на рис.1б показан спектр Фурье для данного колебательного режима, на котором мы видим, что основная частотная компонента определяется параметром ω_0 , также мы видим компоненты-спутники.

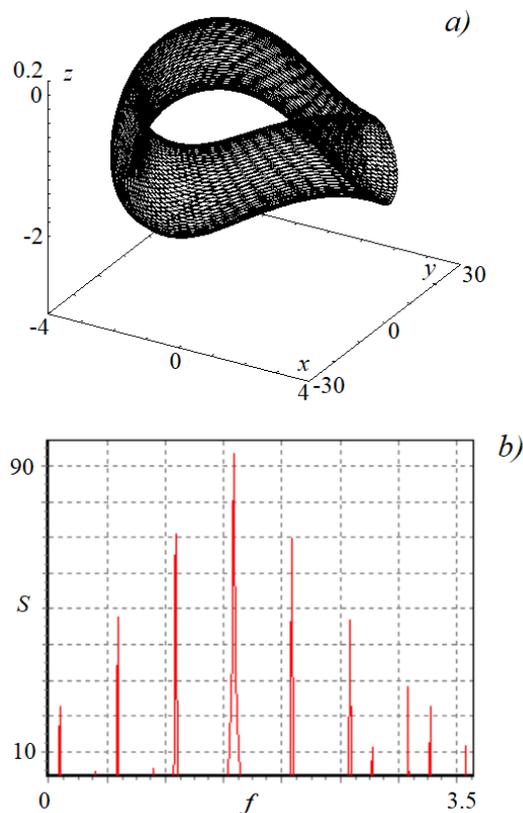


Рис. 1. Фазовый портрет и спектр Фурье для автономного квазипериодического генератора (1), $\varepsilon=4$, $b=1$, $\mu=0.02$, $\beta=1/18$, $\lambda=-1$, $\omega_0=2\pi$

Ввести внешнее воздействие на модель (1) наиболее удобно в соответствии с таким же принципом, как и для осциллятора ван дер Поля, т.е. добавлять слагаемое внешнего сигнала к переменной, отвечающей за скорость:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x + A \sin(\omega t + \varphi), \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu \dot{x}^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Система (3) имеет три новых параметра, определяющих внешнее воздействие: A – амплитуда, ω – частота, φ – фаза.

Как говорилось ранее, адаптивность внешнего воздействия, выражается в зависимости фазы внешнего сигнала от динамической переменной. В рамках данной работы мы рассмотрим линейную зависимость фазы от переменной x :

$$\varphi(x) = kx. \quad (4)$$

Тогда, введя новую динамическую переменную $v = \omega t + kx$, мы получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x + A \sin v, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2, \\ \dot{v} &= \omega + ky,\end{aligned}\quad (5)$$

которая и является основным объектом исследования данной работы.

3. Методы исследования

Как отмечалось во введении, наибольший интерес представляет исследование сложного поведения: квазипериодических колебаний и многомерного хаоса [26,27]. В связи с чем, необходимы инструменты, которые позволяют классифицировать данные типы колебаний. Далее основным инструментом исследования будет метод карт показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова рассчитывались методом Бенеттина [Ben80] с ортогонализацией по Грамму-Шмидту. Размерность системы с воздействием равна 4, соответственно динамический режим будет иметь 4 характеристических показателя Ляпунова, $\Lambda_{1,2,3,4}$, по которым можно диагностировать следующие типы динамических режимов:

P – периодический режим, $\Lambda_1=0, \Lambda_{2,3,4}<0$;

Q2 – двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2}=0, \Lambda_{3,4}<0$;

Q3 – трехчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2,3}=0, \Lambda_4<0$;

C – хаос, $\Lambda_1>0, \Lambda_{2,3,4}<0$;

C0 – хаос с близким к нулю дополнительным нулевым показателем Ляпунова, $\Lambda_1>0, \Lambda_2=0, \Lambda_3 \approx 0, \Lambda_4<0$;

HC – гиперхаос, $\Lambda_{1,2}>0, \Lambda_3=0, \Lambda_4<0$.

Стоит отметить, что расчет показателей Ляпунова процесс достаточно затратный с точки зрения машинного счета, т.к. для хорошей точности расчета необходимо провести накопление показателей Ляпунова для достаточно длинных временных рядов. В наших экспериментах мы рассматриваем траектории длиной от $4 \cdot 10^5$ итераций с шагом интегрирования 10^{-2} [28-32].

Для анализа мультистабильности необходимо исследовать динамику системы при вариации начальных условий. Хорошо известен такой метод отслеживания мультистабильных состояний равновесия, как метод наследования начальных условий, когда при изменении параметров в качестве начального условия используется начальное условие с предыдущего значения параметров. При построении карт показателей Ляпунова мы использовали фиксированные начальные условия для стартовой точки при нулевой амплитуде: $x_0=0.5, y_0=0.51, z_0=0.52, v_0=0$ и затем с увеличением амплитуды сигнала использовали наследуемые начальные условия.

Для анализа мультистабильности в работе были построены бифуркационные деревья с фиксированными и наследуемыми начальными условиями при различных направлениях сканирования

пространства параметров. Таким образом, удастся визуализировать различные сосуществующие в системе аттракторы.

4. Картина режимов модели генератора квазипериодических колебаний под гармоническим внешним воздействием

Сначала рассмотрим случай обычного внешнего воздействия, которое описывается системой (5) при $k=0$. На рис.2 представлена карта показателей Ляпунова на плоскости частота – амплитуда воздействия для значения параметра $\omega_0=2\pi$, когда автономная система демонстрирует квазипериодические автоколебания. В этом случае (рис.2а) мы видим основной язык синхронизации, выходящий из точки, отвечающей частоте собственных колебаний осциллятора. Языки синхронизации на субгармониках внешней силы очень узкие, но можно различить язык на утроенной частоте. Данные языки встроены в области трехчастотной квазипериодичности. Также наблюдается система языков двухчастотной квазипериодичности, отвечающая комбинационным частотам квазипериодического сигнала. Хорошо прослеживаются два языка двухчастотной квазипериодичности справа и слева от основного языка синхронизации. Возле основного языка синхронизации при достаточно больших амплитудах внешнего сигнала можно обнаружить область хаотического поведения, которая возникает при перекрытии языков синхронизации на кратных частотах. Хаотические режимы занимают малые области в пространстве параметров.

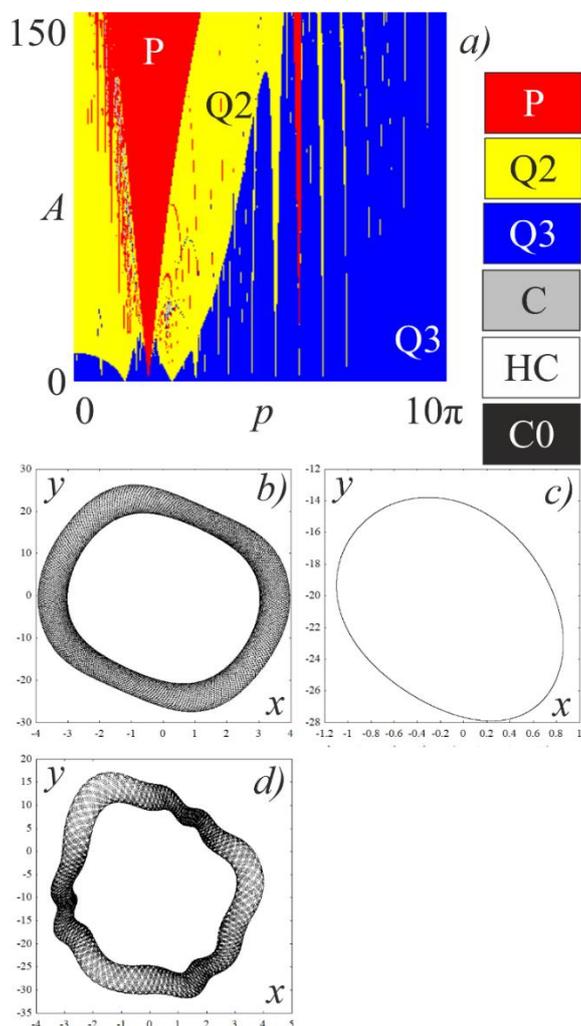


Рис.2. Карты Ляпуновских показателей системы (5) для $k=0$. Примеры фазовых портретов в стробоскопическом разрезе: б) $p=18.3, A=10$; в) $p=10.3, A=130$; г) $p=18.3, A=130$. Другие параметры: $\varepsilon=4, b=1, \mu=0.02, \beta=1/18, \lambda=-1$

На рис.2б и 2в представлены примеры фазовых портретов для двухчастотного и трехчастотного торов в стробоскопическом сечении. Хорошо видно, что двухчастотному тору в стробоскопическом сечении отвечает инвариантная кривая, трехчастотный тор в сечении – двумерный тор.

Далее рассмотрим трансформацию картин синхронизации при учете адаптивности внешнего сигнала в каждом случае.

5. Картина режимов модели генератора квазипериодических колебаний под адаптивным гармоническим внешним воздействием

Рассмотрим теперь случай, когда внешнее воздействие обладает свойством адаптивности, т.е. $k \neq 0$. На рис.3а представлена карта показателей Ляпунова для малого значения параметра k , отвечающего за адаптивность неавтономной системы (5) $k=0.5$, на рис.3б показана карта для большого значения данного параметра, $k=5$.

Введение малой адаптивности (рис.3а, $k=0.5$) меняет картину следующим образом: основной язык синхронизации разрушается. На карте показателей Ляпунова можно видеть, что при малых амплитудах наблюдаются трехчастотные торы, со встроенной системой языков двухчастотных торов на комбинационных частотах. С увеличением амплитуды языки двухчастотных торов перекрываются, образуя однородную область Q2. Внутри языков двухчастотных торов можно обнаружить очень узкие языки периодических колебаний, которые с увеличением амплитуды расширяются и возникают хаотические колебания.

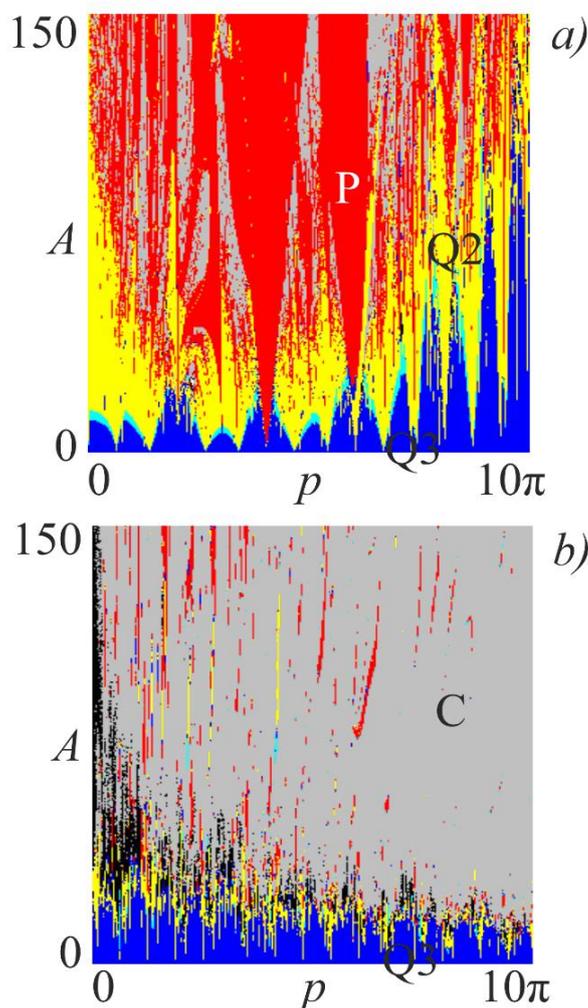


Рис. 3. Набор карт динамических режимов и карт показателей Ляпунова для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме квазипериодических колебания, $\omega_0=2\pi$. а) $k=0.5$; б) $k=1.0$; в) $k=5.0$

При больших значениях параметра адаптивности внешнего сигнала (рис. 3в, $k=5$) на карте режимов происходит разрушение языков синхронизации, мы можем видеть небольшие острова периодичности внутри области нерегулярных колебаний. На карте показателей Ляпунова при этом при малой амплитуде сохраняются трехчастотные торы, которые затем трансформируются в двухчастотные и

затем разрушаются с переходом в хаотические колебания. При этом области двухчастотных торов в пространстве параметров очень малы, с ростом амплитуды внешнего сигнала они быстро разрушаются, и возникает хаотическое поведение.

Неавтономная модель (5) имеет четырехмерное фазовое пространство, следовательно, в ней может возникать многомерный хаос. На карте показателей Ляпунова для малой адаптивности области хаоса малы и развития многомерного хаоса не наблюдается. При увеличении параметра адаптивности хаос начинает доминировать, области в пространстве параметров увеличиваются, и мы также можем видеть возможность возникновения многомерного хаоса (черный и белый цвет на карте). Особенности хаотического поведения рассмотрим более подробно в следующем разделе.

6. Хаос, возбуждаемый адаптивным внешним воздействием

На карте классифицированы области хаоса, обозначенные черным цветом с близким к нулю дополнительным показателем Ляпунова. Данный вид хаоса является многомерным, для его реализации необходима потоковая динамическая система размерностью более 3. Карта показателей Ляпунова строилась с порогом для «нулевого» значения $\sim 10^{-3}$. Для более детального описания такого типа хаотического поведения мы построили графики показателей Ляпунова, которые представлены на рис.4 в широком диапазоне параметра амплитуды внешнего сигнала для различных фиксированных значений параметра p . Так как области многомерного хаоса на карте более ярко выражены при малых периодах внешнего сигнала, мы зафиксировали данный параметр около частоты собственных автоколебаний автономной системы: $p=5$ (рис.4а), $p=6$ (рис.4б), $p=7$ (рис.4с), $p=10$ (рис.4д).

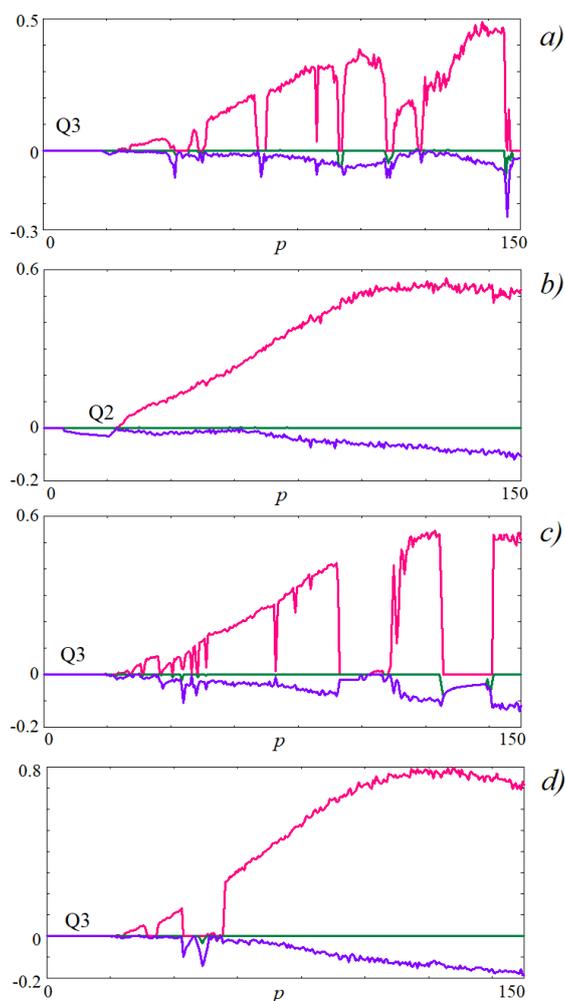


Рис.4. Графики показателей Ляпунова для квазипериодического осциллятора с адаптивной внешней силой (5) в режиме квазипериодических колебаний, $\omega_0=2\pi$, $k=5$. а) $p=5$; б) $p=6$; в) $p=7$; д) $p=10$

На всех графиках при малой амплитуде внешнего воздействия достаточно хорошо прослеживается трехчастотная квазипериодичность (Q3), для которой три старших показателя Ляпунова равны нулю.

С увеличением амплитуды сигнала в результате квазипериодической седло-узловой бифуркации рождается двухчастотный тор, третий показатель становится отрицательным, а два старших остаются нулевыми. Порог бифуркации рождения двухчастотного тора отличается для различных значений параметра p . Наиболее низкий порог имеет место при $p=6$ и на графике мы можем видеть четко область существования двухчастотного тора. Для других значений параметра p данная область также присутствует.

Дальнейшее увеличение амплитуды сигнала приводит к разрушению квазипериодических колебаний и развитию хаоса. Графики на рис.4а и 4с имеют ярко выраженные языки периодичности или языки двухчастотной квазипериодичности, внутри областей хаоса. В то время как для рис.4b и 4d языки периодичности практически отсутствуют. При больших амплитудах внешнего сигнала для всех случаев имеет место классический хаотический режим, который характеризуется одним положительным, одним нулевым и двумя отрицательными показателями Ляпунова. При этом на графиках можно выделить две небольших интервала, где можно ожидать развитие многомерного хаоса: $A \approx 20-30$ для всех графиков и $A \approx 100-120$ для случаев $p=5$ и $p=7$.

Рассмотри более детально особенности формирования хаоса для каждого из случаев. На рис. 5 представлен увеличенный фрагмент графиков показателей Ляпунова для первой области при $p=5$. На рис.5b-5е показаны примеры аттракторов при формировании хаоса. Аттрактор на рис.5b отвечает двухчастотному тору, который возник в результате квазипериодической седло-узловой бифуркации: на поверхности трехчастотного тора рождается пара торов: устойчивый и седловой. Торы являются 17-оборотными, в стробоскопическом сечении мы можем видеть, как инвариантная кривая делает 17 оборотов. Дальнейшее увеличение параметра приводит к разрушению инвариантных торов и формированию хаотического аттрактора.

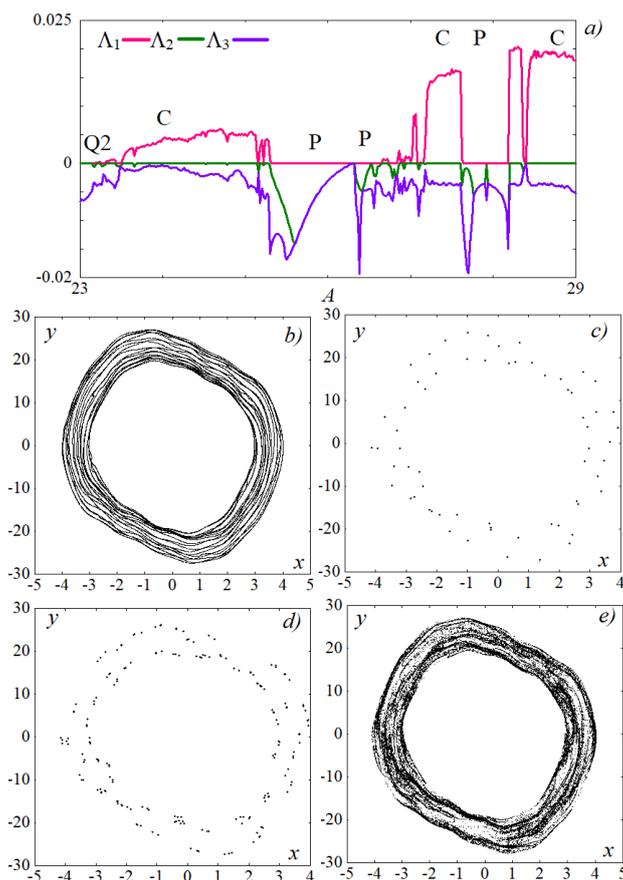


Рис.5 а) график показателей Ляпунова для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме квазипериодических колебания, $\omega D=2\pi$, $k=5$, $p=5$. Примеры аттракторов в стробоскопическом сечении, демонстрирующие разрушение трехчастотного тора б) $A=23$; в) $A=26$; д) $A=26.3$; е) $A=29$

Увеличенный фрагмент на рис.5а показывает, что третий показатель Ляпунова в этом случае имеет малое значение по абсолютной величине, но при этом отрицательный. Данная особенность связана

скорее всего с наличием двумерного седлового тора, который возник в результате седло-узловой бифуркации. Данный седловой тор имеет одномерное неустойчивое многообразие, а также двумерное нейтральное многообразие. Траектории при прохождении вблизи такого тора характеризуются дополнительным показателем Ляпунова, близким к нулю.

Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего сигнала приводит к появлению окон периодичности, на рис.5с представлен пример аттрактора в стробоскопическом сечении отображении, отвечающий устойчивому предельному циклу периода 63. На рис.5d показан пример предельного цикла периода 189, который возник в результате бифуркации Неймрака-Сакера, когда из базового режима мы попадаем в язык синхронизации, в данном случае – это язык утроенного периода. Затем происходит каскад бифуркаций удвоения периода и развитие классического хаоса, пример аттрактора которого показан на рис. 5d.

Для большой амплитуды внешнего сигнала можно также обнаружить область, где два старших показателя Ляпунова – положительные. В рамках доклада мы расскажем подробнее о формировании гиперхаоса в области амплитуд 100-120.

7. Заключение

Проведено исследование влияния адаптивного внешнего воздействия на автономные квазипериодические колебания. Показано, что динамика неавтономной системы становится более богатой, появляются трехчастотные квазипериодические колебания. Наличие адаптивности приводит к разрушению основных мод синхронизации, развитию языков на субгармониках внешней силы и формированию хаотического поведения.

При достаточно большом значении параметра адаптивности периодические и двухчастотные квазипериодические колебания в пространстве параметров занимают очень малые области. При этом в небольших областях пространства параметров можно наблюдать развитие многомерного хаоса.

При малых амплитудах внешнего воздействия имеет место квазипериодическая седло-узловая бифуркация, в результате которой на поверхности трехчастотного тора рождается пара торов: устойчивый и седловой двухчастотные торы [33,34]. Наличие таких седлового тора в фазовом пространстве приводит к тому, что помимо положительного и нулевого показателей Ляпунова в спектре, появляется близкий к нулю, отвечающий движению траекторий около седлового тора.

Для больших значений амплитуды воздействия показана возможность развития гиперхаоса, а также мультистабильности.

Литература

1. *Best R. Phase-Lock Loops: Design, Simulation and Application*, 6th ed. McGraw-Hill; 2007. p.1-489.
2. *Shalfeev V D, Matrosov V V. Nonlinear dynamics of phase synchronization systems*. Nizhny Novgorod: Publishing House of the Nizhny Novgorod State University; 2013. p.1-336. (in Russia)
3. *Kuznetsov NV, Leonov GA. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops*. Cambridge Scientific Publisher; 2014. 218 p.
4. *Kuznetsov NV, Belyaev YV, Styazhkina AV, Yuldashev MV, Yuldashev RV. Effect of PLL architecture on MEMS gyroscope performance. Gyroscopy and Navigation. 2022; 13(1):44– 52. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2075108722010047>.*
5. *G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops*. Cambridge Scientific Publisher, 2014.
6. *Ottesen J. T. Modelling the dynamical baroreflex-feedback control //Mathematical and Computer Modelling. 2000. Т. 31. №. 4-5. С. 167-173.*
7. *Hall J.E. Guyton and Hall textbook of medical physiology e-Book*. Elsevier Health Sciences; 2015. p. 1–1147.
8. *Е.П. Селезнев, Н.В. Станкевич. Сложная динамика неавтономного осциллятора с управляемой фазой внешнего воздействия. Письма в ЖТФ, 2019, 45, вып. 2, 59-62. (Seleznev E. P., Stankevich N. V. Complex dynamics of a non-autonomous oscillator with a controlled phase of an external force //Technical Physics Letters. 2019. V. 45. No. 1. P. 57-60.)*
9. *D.A. Krylosova, E.P. Seleznev, N.V. Stankevich. Dynamics of Non-Autonomous Oscillator with a Controlled Phase and Frequency of External Forcing. . Chaos, Solitons & Fractals, 134, 2020, no.5, 109716.*
10. *Krylosova D., Seleznev E., Stankevich N. The simplest oscillators with adaptive properties The simplest oscillators with adaptive properties //2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). IEEE, 2020. С. 140-143.*
11. *Селезнев Е.П., Станкевич Н.В., Крылосова Д.А. Экспериментальное исследование осциллятора с управляемым внешним воздействием // Нелинейные волны-2020. 2020. С. 153-155.*

12. *Polczyński K., Bednarek M., Awrejcewicz J.* Magnetic oscillator under excitation with controlled initial phase //Awrejcewicz J.(Ed.), Kaźmierczak M.(Ed.), Olejnik P.(Ed.), Mrozowski J.(Ed.), DSTA-2021 Conference Books–Abstracts.
13. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press. 2001.
14. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E. & Sosnovtseva O.* Synchronization: from simple to complex. Springer. 2009.
15. *Ding E. J., Hemmer P. C.* Winding numbers for the supercritical sine circle map // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* – 1988. – Т. 32. – №. 1. – С. 153-160.
16. *N.Yu.Ivankov, S.P.Kuznetsov.* Complex periodic orbits, renormalization and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos. *Phys. Rev. E*, 63, 2001, No 4, 046210.
17. *Matsumoto T.* Chaos in electronic circuits // *Proceedings of the IEEE.* 1987. Т. 75. №. 8. С. 1033-1057.
18. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M.* Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical physics letters.* 2005. V. 31, no. 10. P. 853-855.
19. *Anishchenko V., Nikolaev S. & Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E.* 2006. V. 73. P. 056202.
20. *Anishchenko V., Nikolaev S. & Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E.* 2007. V. 76. no. 4. P. 046216.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2010. – Т. 15. – №. 6. – С. 1676-1681.
22. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics.* 2013. Т. 222. №. 10. С. 2391-2398.
23. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Shchegoleva N.A., Stankevich N.V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2019. Т. 398. С. 1-12.
24. *Кузнецов А.П., Седова Ю.В.* Воздействие гармонического сигнала на генератор квазипериодических колебаний Анищенко–Астахова // *Письма в ЖТФ.* – 2022. – Т. 48. – №. 4 С. 48-50 (Kuznetsov A.P., Sedova Yu.V. Anishchenko-Astakhov quasiperiodic generator excited by external harmonic force. *Technical physics letters.* 2022. V. 48, no. 2. P. 85-87.)
25. *Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P.* Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2015. – Т. 20. – №. 1. – С. 316-323.
26. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, №. 4. С. 17–32. DOI: 10.18500/0869- 6632-2010-18-4-17-32.
27. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2011. Т. 7, №. 3. С. 411–425.
28. *Broer H., Sim' o C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15, no 4. P. 1205. DOI: 10.1088/0951- 7715/15/4/312.
29. *Broer H., Sim' o C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15, no 4. P. 1205. DOI: 10.1088/0951- 7715/15/4/312.
30. *Broer H., Sim' o C., Vitolo R.* Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus // *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B.* 2010. Vol. 14, no 3. P. 871. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
31. *Stankevich N.V., Shchegoleva N.A., Sataev I.R., Kuznetsov A.P.* Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.* 2020. Vol. 15, no. 1. P. 111001. DOI: 10.1115/1.4048025. *Крылосова Д. А., Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Станкевич Н. В.* Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 1
32. *Grines E.A., Kazakov A.O., Sataev I.R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2022. Vol. 32, no 9. P. 093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
33. *Karatetskaya E., Shykhmamedov A., Kazakov A.* Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2021. Vol. 31, no. 1. P. 011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
34. *Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V.* Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2023. Vol. 169. P. 113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.
35. *Broer H., Sim' o C., Vitolo R.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2011. Vol. 16, no. 1–2. P. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.