DOI: 10.25728/mlsd.2023.0587

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ КОНФЛИКТНЫХ ЗАДАЧ

Красников К.Е.
МИРЭА – Российский Технологический Университет, Москва, Россия
krasnikovkirill@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена разработке численных методов нахождения конфликтных равновесий в игровых задачах в чистых стратегиях. Помимо описания самих методов формулируются также утверждения, показывающие их сходимость, а также приводится пример использования методов в дифференциальной теоретико-игровой задаче преследования-уклонения.

Ключевые слова: теория игр, конфликтные равновесия, дифференциальные игры, задача преследования.

Введение

Как известно, наиболее распространённый в настоящее время метод решения конфликтных задач, основанный на нахождении равновесия по Нэшу, имеет ряд существенных ограничений своего применения:

1. Для существования равновесия по Нэшу целевые функции участников должны иметь специальный вид (например, иметь седловую точку в случае антагонистической игры двух лиц).
2. Для остальных задач, в которых равновесие по Нэшу в чистых стратегиях найти не удаётся, существование решения гарантируется лишь в классе смешанных стратегий, представляющих собой функцию распределения вероятности (вероятностную меру) на множестве стратегий игроков.

Поэтому и существующие в настоящее время численные методы решения конфликтных задач в большинстве своём подразделяются на следующие категории:

1. Методы решения матричных игр.
2. Методы отыскания минимакса (для антагонистических игр двух лиц).
3. Методы приближённого нахождения смешанных решений, путём их аппроксимации атомистической вероятностной мерой (сосредоточенной в узлах равномерной сетки).

В этой связи большой интерес представляет численная реализация методов поиска игровых задач, основанных на понятиях конфликтных равновесий, разработанных Э.Р. Смольяковым [1].

Эти методы позволяют находить решения в исходных, так называемых «чистых стратегиях», не прибегая к смешанным (основанным на вероятностной мере) стратегиям, поскольку последние могут быть не применимы для задач, не предполагающих многократного повторения.

1. Система конфликтных равновесий

Будем рассматривать конфликтные задачи, удовлетворяющие следующим допущениям.

Допущение 1. Пусть Q – метрическое пространство, G – компактное множество $G \triangleq Q^N \triangleq \underbrace{Q \times \ldots \times Q}_{N}$ и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q), i = \overline{1, N}, q = (q_1, \ldots, q_N) \in G$.

Пусть q_i – стратегия i-го игрока, $q_i \in Q$, $q^i \triangleq (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_N)$ – стратегии остальных $N-1$ игроков при фиксированной стратегии q_i i-го игрока, $q^i \in Q^{N-1}$. $J_i(q)$ – платёжная функция (функционал) игрока i, которая определяет размер некого блага или ресурса, который получает i-й участник, при выборе им стратегии q_i и при выборе стратегии q^i остальными участниками.

При этом функции $J_i(q), \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{N}}$ предполагается рассматривать как трансферабельные, то есть предполагающие возможность любого деления и распределения дохода между игроками.

Пусть $G(q_i)$ и $G(q^i)$– сечения (срезы) множества G при фиксированной стратегии i-го игрока (q_i) или всех игроков кроме i-го (обстановке q^i), соответственно.

Пусть $J(q) \triangleq \sum_{k=1}^{N} J_k(q)$ – суммарная платёжная функция всех игроков,

$J^i(q) \triangleq \sum_{k \neq i} J_k(q)$– суммарная платёжная функция всех игроков кроме i-го.

Предполагается, что i-й участник стремится доставить максимум своей платёжной функции $J_i(q_i, q^i)$, выбирая стратегию $q_i \in Q$.

Прежде всего дадим определение в сделанных обозначениях классического равновесия по Нэшу.

Определение 1. Ситуацию $q^* \in G$ назовём равновесием по Нэшу (C^N-экстремальной), если

$$\max_{q_i \in G(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i) = J_i(q^*), \quad i = \overline{1, N}, \text{где } q^i = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_N) \qquad (1)$$

Максимум в выражении (1) берётся по всем допустимым стратегиям i-го участника q_i из сечения множества G с зафиксированными в равновесной ситуации q^* стратегиями остальных участников (обстановке) q^{i*}.

Однако данное равновесие обладает рядом недостатков: во-первых, оно существует далеко не всегда и, во-вторых, даже когда существует, может определять далеко не самую выгодную для всех участников задачи ситуацию (что будет продемонстрирована на разбираемом ниже примере). Поэтому, помимо этого ставшего классическим равновесия в работе используется также система конфликтных равновесий, разработанная Э.Р. Смольяковым [1]. Данная система представляет собой набор усиливающихся равновесий, самое слабое из которых существует в любой игровой задаче, удовлетворяющей допущению 1. Таким образом для любой такой задачи можно найти наиболее сильное из существующих равновесий, что и будет являться решением.

Ниже приводятся определения некоторых базовых равновесий данной системы.

Определение 2. Ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовём A_i-экстремальной, если или $G(q^{i*}) = q_i^*$, или каждой стратегии $q_i \in G\left(q^{i*}\right)\backslash q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну ответную стратегию $\hat{q}^i = \hat{q}^i < q_i >$ остальных $N-1$ игроков, такую, чтобы

$$J_i(\hat{q}^i, q_i) \leqslant J_i(q^i). \tag{1}$$

Обозначая через A_i множество всех A_i-экстремальных ситуаций, ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовём ситуацией симметричного слабого активного равновесия или, короче, A-равновесием, если $q^* \in A_1 \cap \ldots \cap A_N \stackrel{\Delta}{=} A$

Запись $\hat{q}^i < q_i >$, обозначает, что остальные участники выбирают свою ответную стратегию $\hat{q}^i$, как реакцию на выбор стратегии, i-м участником в том случае, если он решит отклониться от равновесной стратегии q_i^*, выбрав другую стратегию $q_i \in G(q^{i*})\backslash q_i^*$.

Смысл равновесия, задаваемого определением 0.1, заключается в том, что если i-й участник пожелает отклониться от своей равновесной стратегии q_i^*, выбрав какую-то другую допустимую для него в данной игровой ситуации стратегию q_i (в погоне за более высоким значением своей платёжной функции J_i), то остальные участники могут «наказать» отступника ответной стратегией $\hat{q}^i < q_i >$, в результате чего i-й участник получит не больше, чем он получил бы в равновесной игровой ситуации q^*. Поэтому ситуация q^* и называется равновесной в том смысле, что ни одному из участников не выгодно отклоняться от неё, поскольку иначе они рискуют быть «наказанными» остальными игроками.

Симметричное A-равновесия является самым слабым из предлагаемой к рассмотрению системы конфликтных равновесий. В работе [1, Теорема 1.2, стр. 95] доказывается, что данное равновесие существует во всяком случае в любой ε-аппроксимации, $\forall \varepsilon > 0$, в любых игровых задачах, удовлетворяющих довольно общим допущениям 1. Поскольку при численном решении в реальных задачах равновесные ситуации ищутся приближённо, то для приложений неважно, окажется ли ситуация q^* точным A-равновесием или же равновесной с допустимой точностью , где – сколь угодно малое число. Таким образом введение данного равновесия решает проблему существования решения игровой задачи.

Однако, как правило, A-равновесные ситуации оказываются неединственными. Поэтому следующие понятия определяют естественные усиления (сужения) множества A-равновесий.

Определение 3. Ситуацию (точку) $q^* \in A_i$ назовём B_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*) \tag{2}$$

Назовём ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i \stackrel{\Delta}{=} B$, где B_i – множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Логика построения B-равновесия такова, что каждый из участников, отобрав для себя круг игровых ситуаций, от которых ему не выгодно отклоняться ввиду наличия угроз уменьшения выигрыша (множества A_i-равновесных ситуаций), предоставляет теперь остальным участникам выбрать на этом множестве наилучшие для них игровые ситуации. Тем самым равновесная ситуация становится более устойчивой по отношению к отклонениям от неё участников задачи.

Поэтому в выражении (2) выбирается наилучшая для остальных участников ситуация в сечении множества A_i фиксированной в равновесной точке стратегией i-го участника q_i^*.

Равновесие, задаваемое следующим определением, является одним из возможных усилений B-равновесия.

Определение 4. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовём $\overline{D}_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*) \tag{3}$$

или (то же самое только в развёрнутом виде) - условию

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i} A_i} J_i(\operatorname{Arg} \max_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i)) = J_i(q^*) \tag{4}$$

и назовём её $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} \overline{D}_i \overset{\Delta}{=} \overline{D}$.

Данное понятие равновесия усиливает введённое выше понятие B-равновесия.

Смысл его заключается в том, что после того, как все участники кроме i-го, отобрали для себя наиболее выгодные ситуации в сечениях множества $A_i(q_i)$, для каждой допустимой стратегии i-го участника (множество B_i-экстремальных ситуаций, аргумент функции J_i в выражении (4)), i-й участник выбирает стратегию (из проекции множества A_i на множество его допустимых стратегий $Q_i - Pr_{Q_i} A_i$), доставляющих максимум целевой функции J_i.

Отметим, что в работе [2] введённые понятия конфликтных равновесий сравниваются с другими системами, в частности с равновесием в безопасных стратегиях (РБС) [3].

2. Численные методы нахождения конфликтных равновесий в задачах с дискретным множеством стратегий участников (матричных играх)

Как уже отмечалось, введённые понятия конфликтных равновесий позволяют находить решения для весьма широкого класса конфликтных задач, удовлетворяющих допущениям 1.

Однако для практических задач часто требуются численные методы, с помощью которых можно было бы находить приближённое решение.

Для построения численных методов поиска A-равновесия в задачах с двумя участниками ($N = 2$) полезна следующая теорема, сформулированной и доказанной в монографии [1, с. 25]

Теорема 1. Для того, чтобы ситуация $q^* \in G$ была A_i - экстремальной в конфликтной задаче, удовлетворяющей допущениям 1, необходимо и достаточно удовлетворение условия

$$J_i(q^*) \geqslant \sup_{q_i \in G(q_k^*)} \min_{q_k \in G(q_i)} J_i(q_i, q_k), \quad i = 1,2, \quad k \neq i. \tag{5}$$

Замечание 1. Точная верхняя грань в правой части выражения (5) не достигается в исключительно редких точках q^*. Следовательно, супремум в правой части выражения (5) для численных расчётов в большинстве задач может быть заменён максимум. В частности, такую замену можно произвести, если множество стратегий $G(q_k^*)$ конечно. Выражение (5) в этом случае примет вид:

$$J_i(q^*) \geqslant \max_{q_i \in G(q_k^*)} \min_{q_k \in G(q_i)} J_i(q_i, q_k), \quad i = 1,2, \quad k \neq i. \tag{6}$$

Таким образом для нахождения множества A-равновесных ситуаций необходимо определить значение максимина, стоящего в правой части выражения (6), а затем определить те точки $q^* \in G$, в которых значение соответствующей платёжной функции $J_i(q^*)$ не меньше найденного значения.

Таким образом для того, чтобы определить, является ли некоторая точка q^* игрового множества G A_i-экстремальной необходимо и достаточно вычислить максимин 6 и сравнить с ним значение платёжной функции i-го игрока в интересующей нас точке.

При этом нахождение искомого максимина можно разбить на два этапа.

1. Определить функцию $\widetilde{q_k}(q_i): J_i(q_i, \widetilde{q_k}(q_i)) = \min_{q_k \in G(q_i)} J_i(q_i, q_k)$, то есть определить для каждого значения $q_i \in G(q_k^*)$, при каких $q_k \in G(q_i)$, функция $J_i(q_i, q_k)$ достигает минимума.
2. Определить значения $q_i^{max} \in G(q_k^*)$, в которых функция $J_i(q_i, \widetilde{q_k}(q_i))$ достигает максимума: $J_i(q_i^{max}, \widetilde{q_k}(q_i^{max})) = max_{q_i \in G(q_k^*)} J(q_i, \widetilde{q_k}(q_i))$.

Если множество G является прямоугольным, то есть $G \equiv Pr_{Q_1} G \times Pr_{Q_2} G$, то неравенство (6) можно переписать в следующем виде:

$$J_i(q^*) \geqslant \max_{q_i \in Pr_{Q_i} G} \min_{q_k \in Pr_{Q_k} G} J_i(q_i, q_k), \quad i = 1,2, \quad k \neq i. \tag{7}$$

поскольку $G(q_k^*) \equiv Pr_{Q_i} G$, а $G(q_i) \equiv Pr_{Q_k} G$ В этом случае максимин (6) примет вид (7).

Заметим, что в этом случае искомый максимин не зависит от выбора точки множества G, проверяемой на экстремальность, поскольку максимум и минимум будут браться по проекции множества G на координатную ось ($Pr_{Q_i} G$), а не по сечению, проходящему через конкретную точку множества ($G(q_i^*)$).
При таком допущении вместо того, чтобы вычислять максимин, стоящий в правой части 6, для каждой

проверяемой на A-равновесность точки $q^* \in G$, достаточно вычислить правую часть выражение (7) ровно один раз и, решая соответствующее неравенство, проверить каждую точку множества G на принадлежность множеству A-равновесий.

Если множество стратегий игроков конечно, то платёжные функции $J_i(q), i = 1{,}2$ могут быть заданы в виде матриц. При этом выбор стратегии i-м игроком сводится к выбору строки или столбца матрицы. Таким образом значение платёжной функции i-го игрока определяется значением матрицы $J_i(q)$ в точке, определяющейся выбранной игроками координатой (строкой и столбцом).

Не ограничивая общности, будем предполагать, что первый участник выбирает строку, а второй столбец матрицы $J_i(q)$.

В этом случае алгоритм нахождения множества A_1-экстремальных ситуаций будет выглядеть следующим образом:

1. Вычисляем минимальное значение матрицы J_1 в каждой строке.
2. Находим наибольший из найденных на предыдущем шаге минимумов.
3. Сравниваем все элементы матрицы J_1 с этим значением. Если значение матричной функции J_1 будет больше или равно найденного на предыдущем шаге значения, то соответствующая ситуация принадлежит множеству A_1-равновесий.

Аналогичным образом ищется множество A_2-равновесных ситуаций.

Множество A-равновесий находится как пересечении найденных множеств A_1 и A_2.

В работе [4] приводятся программная реализация приведённого алгоритмы поиска A-равновесных ситуаций, осуществлённая для программной среды математических вычислений GNU OCTAVE. Данный код также совестим и с популярной коммерческой средой для математических вычислений MATLAB.

Алгоритм определения B-равновесных ситуаций будет следующим:

1. Для нахождения множества B_1-равновесных точек вычисляем максимумы по строкам матрицы J_2 для точек $q \in A_1$, то есть тех, в которых значение матрицы $A_1(q) = 1$. Таким образом мы получаем вектор
$$q_2^{max}(q_1) = argmax_{q_2 \in A_1(q_1)} J_2(q_1, q_2) \tag{8}$$
2. Далее определяем нулевую матрицу B_1 и в каждой строке заполняем единицами те элементы q^*, которые с одной стороны принадлежат множеству $A_1(q^*) = 1$, а с другой значение матрицы J_2 в этих точках не меньше максимума по соответствующей строке, найденного на предыдущем шаге $J_2(q_1^*, q_2^*) \geqslant J_2(q_1^*, q_2^{max}(q_1^*))$.
3. Аналогичным образом находим множество B_2-равновесных точек и, наконец, находим множество B-равновесных точек, как пересечение B_1 и B_2.

Алгоритмы поиска других использованных в настоящей работе понятий конфликтных равновесий реализуются подобным образом.

3. Алгоритмы приближённого нахождения конфликтных равновесий в антагонистических играх на плоскости

Теперь рассмотрим использование приведённых выше алгоритмов поиска конфликтных равновесий в задачах с дискретным множеством стратегий (матричных играх) для антагонистических игровых задач следующего вида.

Допущение 2. Пусть в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы координатные оси: абсцисса q и ордината r. Также задана функция $J(q, r)$ на некотором выпуклом, ограниченном множестве G. Первый игрок выбирает стратегию (точку) из проекции множества G на ось q ($Pr_q G$) и стремится максимизировать значение функции $J_1(q, r) \stackrel{\Delta}{=} -J(q, r)$, а второй игрок выбирает стратегию q из проекции множества G на ось r ($Pr_r G$) и стремится максимизировать значение функции $J_2(q, r) \stackrel{\Delta}{=} J(q, r)$.

Будем также предполагать, что отображение $J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с параметром L:
$$|J(x) - J(y)| \leqslant L||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, ||x|| \stackrel{\Delta}{=} (\textstyle\sum_{i=1}^{2} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Для нахождения решения игры такого вида, построим её приближение матричной игрой. Для этого необходимо выполнить следующие шаги:

1. В качестве входных данных подаются платёжная функцию $J(q, r)$, игровое множество G, заданное системой неравенств, а также требуемая точность решения ε (см. рис. 1а).

2. Находим максимальные и минимальные значения абсциссы и ординаты среди всех точек игрового множества, чтобы «вписать» его в некую прямоугольную область (см. рис. 1б).
3. Вводим сетку с шагом δ. Величина шага определяется в зависимости от необходимой точности ε, исходя из выбранного алгоритма определения максимина (7). Если узел сетки входит в множество G, то считаем в нём значение функции $J(q,r)$, если не входит, то не учитываем узел при определении равновесных точек. Таким образом, мы получаем аппроксимацию первоначального платёжного функционала игроков $J(q,r)$ сетчатой функцией $J^{\delta}(i,j)$, заданной на сетке ω_{δ}, состоящей из точек $(i\cdot\delta, j\cdot\delta), i,j\in\mathbb{Z}, (i\cdot\delta, j\cdot\delta)\in G$. (см. рис. 1в).
4. Поскольку фактически сетчатая функция $J_i^{\delta}(i,j)$ является матрицей, то далее решаем матричную игру, используя алгоритм, приведённый в предыдущем разделе.

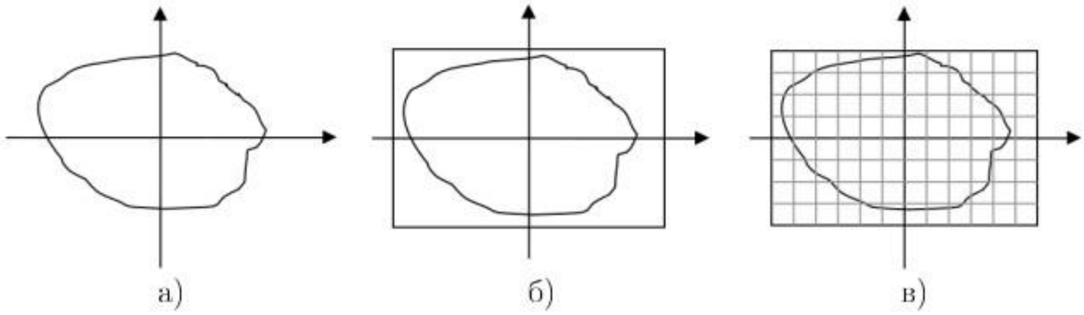

Рис. 1. Введение сетки с шагом δ на игровом множестве G

Решением конфликтной задачи, удовлетворяющей допущениям 2, вообще говоря, будет некоторое подмножество X игрового множества G. Если обозначить через X^{δ} приближённое решение задачи, полученное с помощью приведённого алгоритма с точностью аппроксимации (шагом сетки) δ, то можно поставить вопрос сходимости приближённого решения к точному. Причём сходимость будет пониматься нами в смысле стремления к нулю расстояния по Хаусдорфу между точным множеством решения и приближённым при увеличении точности аппроксимации (уменьшении шага): $h(X,X^{\delta})\to 0$ при $\delta\to 0$.

Напомним, что расстоянием по Хаусдорфу между множествами X и Y, принадлежащим некоторому нормированному пространству R, называется величина $h(X,Y)\stackrel{\Delta}{=} max(sup_{x\in X}inf_{y\in Y}\parallel x-y\parallel, sup_{y\in Y}inf_{x\in X}\parallel x-y\parallel)$.

Может быть доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\overline{J_i}$ - точное значение максимина (7), а $\overline{J_i^{\delta}}$ - приближённое значение, найденное с погрешностью $\varepsilon(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, где $\delta>0$ - параметр, определяющий точность аппроксимации.

Пусть $A_i\subset G$ - множество A_i -экстремальных ситуаций конфликтной задачи, удовлетворяющей допущениям 2, для которых, согласно теореме 1, выполняется следующее неравенство

$$\overline{J_i}-J_i(q^*)\leqslant 0, i=\overline{1,2} \tag{10}$$

Обозначим $A_i^{\delta}\subset G$ - множество решений неравенства

$$\overline{J_i^{\delta}}-J_i(q^*)\leqslant 0, i=\overline{1,2} \tag{11}$$

Тогда A_i^{δ} сходится к A_i по метрике Хаусдорфа при стремлении к нулю параметра аппроксимации δ: $h(A_i^{\delta},A_i)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Доказательство. Поскольку $\overline{J_i^{\delta}}$ - приближённое значение величины $\overline{J_i}$, найденное с погрешностью $\varepsilon(\delta)$, то $|\overline{J_i^{\delta}}-\overline{J_i}|\le\varepsilon(\delta)$

Пусть $\overline{J_i^{\delta}}-\overline{J_i}=-\bar{\varepsilon}(\delta), |\bar{\varepsilon}(\delta)|\le\varepsilon(\delta)$

Следовательно, неравенство (11) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\overline{J_i}-J_i(q^*)\leqslant\bar{\varepsilon}(\delta), i=\overline{1,2} \tag{12}$$

Пользуясь терминологией, введённой в работе [5], A_i^{δ} - множество точек q^* игрового множества G, удовлетворяющих неравенствам (11) и (12) является ε-решением неравенства (10).

В этой же работе показывается, что ε-решение A_i^{δ} стремится по метрике Хаусдорфа к точному решению A_i неравенства (10), если $\bar{\varepsilon} \to 0$.

Поскольку$|\bar{\varepsilon}(\delta)| \leq \varepsilon(\delta)$, а $\varepsilon(\delta)$) → 0 при δ → 0, то $\bar{\varepsilon}(\delta) \to 0$ при δ → 0. Следовательно $h(A_i^{\delta}, A_i) \to 0$ при δ → 0.

Таким образом для построения сходящегося (по метрике Хаусдорфа) метода определения A_i-равновесных ситуаций необходимо выбрать сходящийся метод определения максимина (7).

Как уже отмечалось, в предложенных в предыдущих разделах алгоритме определения максимина, использовался метод перебора на равномерной сетке.

Если шаг сетки равняется δ, а параметр условия Липшица (9) L, то погрешность определения значения минимакса $\varepsilon(\delta)$ будет равняться $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}L$.

Поскольку $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то из доказанного выше утверждения следует сходимость по метрике Хаусдорфа предложенного метода нахождения A_i-равновесий.

Из сходимости метода нахождения $A_i, i = \overline{1,2}$ следует сходимость метода нахождения A-равновесия, поскольку, согласно определению 0.1, $A \overset{\Delta}{=} A_1 \cap A_2$.

Следовательно сходимость метода нахождения A-равновесия доказана.

Сходимость методов нахождения других используемых в работе понятий конфликтных равновесий (B −, и $\overline{D}$ −, заданных определениями 3 и 4 соответственно) следует из того, что для построения этих равновесий используется процедура нахождения глобального экстремума (максимума) функций $J_i(q, r)$ либо в сечении множества A_i-равновесных ситуаций (для нахождения B_i-равновесий), либо в сечении всего множества G (для C_i-равновесий), либо в сечениях множеств B_i (для $\overline{D_i}$-равновесий).

А поскольку использованный в данной работе метод перебора на равномерной сетке сходится при определении глобального экстремума функции, удовлетворяющей условию Липшица, на замкнутом ограниченном множестве, то и предложенные методы нахождения конфликтных равновесий являются сходящимися.

4. Приложение к задаче преследования на полуплоскости

Рассмотрим, следующую задачу, сформулированную впервые в книге Р. Айзекса «Дифференциальные игры» [6].

Предположим, что имеется два объекта (материальные точки) в метрическом пространстве Е, положение которых описывается соответствующим набором фазовых координат.

При этом один из участников, который обозначается символом P (от англ. *pursuer* - преследователь), стремится осуществить захват, то есть привести вектор фазовых координат на некоторое заданное множество. Второй же участник, которого будем обозначать символом E (от англ. *evader* - убегающий), напротив, стремится избежать захвата.

Пусть преследователь P и преследуемый E обладают простым движением, скорости их равны соответственно ω и 1, ω > 1.

Пространство игры представляет собой полуплоскость; ее граница является «стеной», сквозь которую участник не могут проникнуть. Будем рассматривать лишь те начальные положения, когда Е находится в начальный момент времени на упомянутой границе допустимой области.

Для описания положения участников и уменьшения количества соответствующих фазовых переменных удобно ввести подвижную систему координат, связанную с положением первого участника так, что ось Оx проходит через точку P и перпендикулярна границе допустимой области, а ось Оy проходит вдоль этой границы.

В данной системе координат точка P будет занимать положение (x, 0), а точка E соответственно (0, y).

Будем считать, что игрок P может управлять углом φ между вектором своей скорости и осью Оx, а второй участник может изменять направление ψ своего движения вдоль оси Оy.

Тогда уравнения движения участников можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega \cos\varphi, \; x(0) = x_0 \\ \dot{y} = \psi - \omega \sin\varphi, y(0) = y_0 \end{cases} \tag{13}$$

При этом на управляющие параметры φ и ψ, которые могут изменить участники, накладываются следующие ограничения:

$$|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, |\psi| \leq 1 \tag{14}$$

При этом, в отличии от первоначальной постановки Р. Айзекса, будем полагать, что целью игры для участника P явлется, выбирая доступное управление $\varphi(t)$, доставить минимум квадрату расстояния до своего аппонента в момент окончания игры t_1: $x^2(t_q) + y^2(t_1)$, а для участника E, наоборот, целью является доставить данному выражению максимум.

При этом сам целевой функционал может быть записан в интегральной формев следующем виде:

$$J(\varphi,\psi) = 2\int_{t_0}^{t_1}[x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)]dt \tag{15}$$

Задачу (13)-(15) можно рассматривать, как задачу оптимального управления для участников P и E *[7]*, что позволяет свести данную дифференциальную игру к антогонистической игре на плоскости, платёжной функциоей в которой выступает гамильтониан:

$$H(\varphi,\psi) = -x_0\omega\cos\varphi + y_0\psi - y_0\omega\sin\varphi + (\omega^2 + \psi^2 - 2\psi\omega\sin\varphi) \tag{16}$$

Участник P, выбирая управление φ из доступного диапазона (14), стремится доставить данному гамильтониану минимум, а участник E, напротив, выбирая управление ψ, стремится доставить ему максимум.

Пусть начальные условия принимают следующие значения:

$$x_0 = 5; y_0 = 4; \omega = 1{,}5;\ t_0 = 0;\ t_1 = 1 \tag{17}$$

На рисунке 1 представлены множества определённых нами конфликтных равновесий, полученные с помощью применения программной реализации описанных в настоящей работе численных методов.

При этом равновесием по Нэшу и, следовательно, сильнейшим существующем в данной задаче равновесием оказалась точка К, которой соответствуют управления участников φ = 0,87 и ψ = 1.

Отметим при этом, что исходна дифференциальна игра может быть сведена к серии конфликтных задач, на каждой из которых управление участников можно считать постонным и начальными условими дл очередной задачи является положение, которое участники заняли в предыдущей задаче.

Данный итерационный процесс позволет построить траектории участников (рисунок 1 справа), обеспечив столь высокую точность вычислений, насколько это позволяют вычислительные ресурсы.

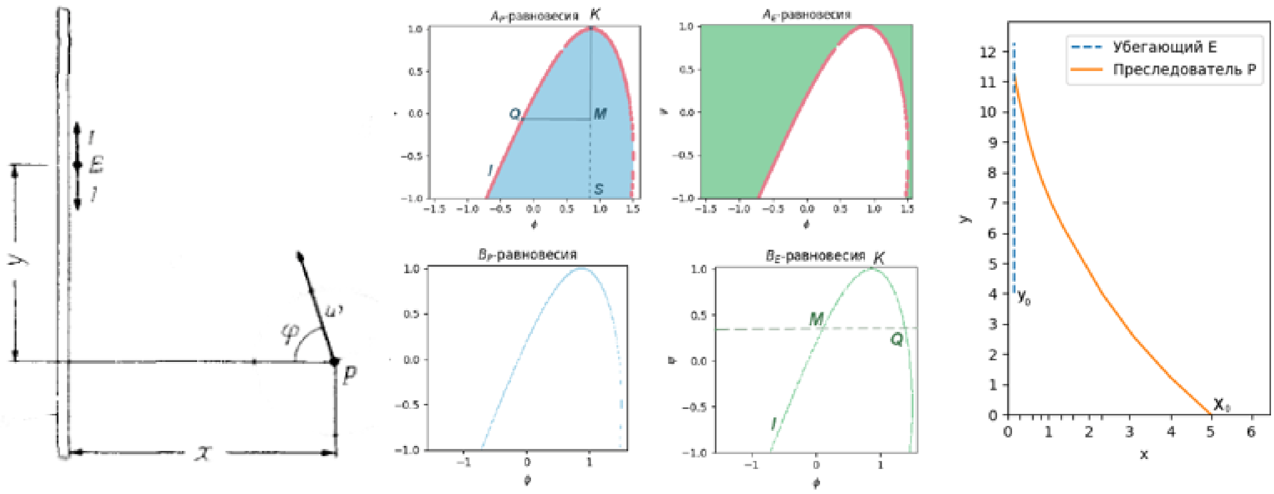

Рис. 1. Положение участников в начальный момент времени, множежества A- и B-равновесных ситуаций на множестве управлений (φ,ψ), а также полученные траектории движения участников

Литература

1. *Смольяков Э.Р.* Методы решения конфликтных задач. – М.: МГУ, 2010.
2. *Красников К.*Е. Математическое моделирование некоторых социально-этических норм поведения с помощью теоретико-игровых подходов // Проблемы управления. — 2022. — Т. 1. — с. 33—53.
3. *Искаков М.Б.* Равновесия в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. 2005. Т.3. – С. 139-153.
4. *Красников К.Е.* Программная реализация методов решения конфликтных задач. 2023. — IT Стандарт.
5. Евтушенко Ю. Г., Посыпкин М. А., Рыбак Л. А., Туркин А. В. Отыскание множеств решений систем нелинейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т.57 №8. С 1248–1254.
6. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967.
7. *Васильев Ф.*П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.