

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРУЮЩИХ СВОЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СЛЕДЯЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
juliakokunko@gmail.com, dim93kr@mail.ru

Аннотация. Разработана процедура синтеза следящего дифференциатора общего вида с сигмовидной коррекцией, который сглаживает и восстанавливает производные сигнальных заданий и порождает реализуемые траектории с учетом физических ограничений конкретного объекта управления. Показано, что увеличение динамического порядка дифференциатора обеспечивает естественную фильтрацию обрабатываемого зашумленного сигнала.

Ключевые слова: реализуемая траектория, следящий дифференциатор, сигма-функция, фильтрация.

Введение

В системах автоматического управления различными техническими объектами и мобильными роботами возникает вспомогательная задача обработки сигналов, на основе которых формируются управляющие воздействия. К таким сигналам относятся, в первую очередь, показания датчиков. Кроме того, если условия рабочего сценария заранее не известны или меняются в процессе эксплуатации, то задающие воздействия, которые определяют рабочий процесс стационарного или путь следования мобильного робота, могут поступать в систему управления в реальном времени из автономного источника. В случае сигнальных задающих воздействий могут возникать следующие проблемы: 1) на полезный сигнал могут накладываться паразитные помехи и шум, требующие фильтрации; 2) требуется восстановить производные задающих воздействий, необходимые для формирования закона управления, не имея их аналитического описания; 3) для негладких заданий требуется их сглаживание с учетом физических ограничений объекта управления на скорость, ускорение и рывок для того, чтобы объект смог отработать эти задающие воздействия. От применяемых методов решения данных проблем зависит качество функционирования системы автоматического управления в целом.

Для решения указанных проблем применяются следующие подходы. Для обработки зашумленных сигналов обычно используют фильтр Калмана [1] или фильтры низких частот [2]. Для восстановления производных можно использовать методы численного дифференцирования [3]. Однако они дают грубые ошибки при восстановлении старших производных зашумленных сигналов. Для одновременного решения первых двух задач представляется целесообразным использовать динамический дифференциатор с фильтрующими настройками корректирующих воздействий [4–5]. Такой дифференциатор имеет каноническую матрицу системы и полное управление (коррекцию), которое воздействует на все переменные состояния. Размерность вектора состояния дифференциатора равна размерности его корректирующих воздействий. Принцип их настройки аналогичен принципу настройки наблюдателей для систем с неопределенным входом. Такие наблюдатели предназначены для оценивания неизмеряемых переменных вектора состояния объекта по измеряемому выходу, поэтому он не имеет механизмов для его сглаживания. Таким образом, дифференциатор–наблюдатель сможет обеспечить решение только первых двух указанных выше проблем.

В отличие от дифференциатора–наблюдателя в предыдущих работах авторов был предложен следящий дифференциатор (динамический генератор) [6–7]. Он также имеет каноническую структуру, но корректирующие сигналы воздействуют только на старшую производную. В коррекции можно использовать только сам внешний сигнал, так как его производные неизвестны. Принцип настройки следящего дифференциатора аналогичен принципу настройки следящей системы с несогласованными возмущениями. Для стабилизации ошибок слежения используются фиктивные и реальные гладкие сигмовидные корректирующие воздействия, которые имеют S-образную форму и всюду ограничены. Поэтому их настройка позволяет учитывать физические ограничения на скорость и ускорение объекта управления. Показано, что выходные переменные следящего дифференциатора отслеживают исходные негладкие сигналы с некоторой точностью, что, во-первых, обеспечивает их естественное сглаживание. Во-вторых, выбор параметров фиктивных корректирующих воздействий следящего дифференциатора с учетом физических ограничений объекта на скорость и ускорение приводит к тому, что выходные переменные генератора порождают новые задающие воздействия,

которые допустимы для объекта управления. Они не приводят к резким рывкам и к износу механизма. И, в-третьих, путем увеличения динамического порядка следящего дифференциатора можно получить производные новых реализуемых задающих воздействий любого требуемого порядка. Таким образом, следящий дифференциатор решает вторую и третью проблемы, указанные выше.

В данной работе рассматривается принципиальная возможность решения с помощью следящего дифференциатора всех трех указанных проблем одновременно: фильтрации, дифференцирования и сглаживания поступающих извне сигналов. Тогда переменные следящего дифференциатора можно будет использовать в системе управления объектом в качестве реализуемого задающего воздействия. Научная новизна работы состоит в том, что будут дополнительно исследованы фильтрующие свойства следящего дифференциатора в зависимости от его динамического порядка. В качестве примера для построений используется одноканальный объект автоматического управления, математическая модель которого представима в канонической форме вход – выход. Без ограничения общности полученные результаты можно распространить на многоканальные объекты управления с одинаковым числом входов и выходов.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 дается описание математической модели одноканального минимально-фазного объекта управления в каноническом виде, которое принимается за основу для построения следящего дифференциатора. В разделе 2 представлен основной результат работы. Приводится методика построения и процедура настройки следящих дифференциаторов различных порядков с сигмовидными корректирующими воздействиями. В процедуре учитываются ограничения на переменные состояния объекта управления и необходимость фильтрации обрабатываемого сигнала. Выдвигаются гипотезы о динамическом порядке следящего дифференциатора, при которых обеспечивается лучшая фильтрация внешнего сигнала и его производных. В разделе 3 представлены результаты численного моделирования и сравнительного анализа обработки сигналов динамическими следящими дифференциаторами различных порядков.

1. Канонический вид модели одноканального объекта управления. Постановка задачи

В качестве основы для дальнейших построений рассматривается класс минимально-фазных технических систем с одним входом и одним выходом третьего порядка. Предполагается, что эти системы наблюдаемы относительно выхода и их относительный порядок равен трем. Это означает, что их математическую модель с помощью трехкратного дифференцирования выходной переменной в силу системы можно представить в каноническом виде вход – выход [8]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 &= f(x) + b(x_1)u, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор состояния (новый координатный базис), переменные которого можно трактовать как положение, скорость и ускорение соответственно; x_1 – выходная (регулируемая) переменная, $f(x)$ – дифференцируемая функция, которая зависит от параметров объекта, u – управление, $b(x_1) \neq 0$.

Примером системы, представимой в каноническом виде (1), является, например, математическая модель однозвенного манипулятора, жестко сочлененного с валом двигателя постоянного тока (ДПТ). С учетом редуцированной динамики ДПТ эта модель имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \dot{q}_2 = a_{21} \sin q_1 - a_{22} q_2 + b_2 \tau, \\ \dot{\tau} &= -a_{32} q_2 - a_{33} \tau + b_3 u, \end{aligned} \quad (2)$$

где $q_1(t)$ – выходная (регулируемая) переменная, а именно угловое положение звена манипулятора, которое под действием управления совершает угловые перемещения в вертикальной плоскости $q_1 \in [-\pi; \pi]$, верхнее вертикальное неустойчивое положение рассматривается в качестве точки отсчета; $q_2(t)$ – угловая скорость звена, $\tau(t)$ – крутящий момент, приложенный к звену манипулятора на оси подвеса, $\tau(t)$ пропорционален току якоря ДПТ, u – входное управляющее воздействие, а именно напряжение питания якорной цепи; $a_{ij} > 0, b_i > 0$ – известные постоянные физические параметры [9].

Канонический вид (1) системы (2) будет получен с помощью невырожденной замены переменных

$$\begin{aligned}x_1 &= q_1, x_2 = q_2, x_3 = a_{21} \sin q_1 - a_{22} q_2 + b_2 \tau, b = b_2 b_3, \\f(x) &= a_{33} a_{21} \sin x_1 - (a_{32} b_2 + a_{33} a_{22} - a_{21} \cos x_1) x_2 - (a_{33} + a_{22}) x_3.\end{aligned}\quad (3)$$

Основная задача для системы (2), представленной в виде (1), заключается в синтезе закона управления (программного или в форме обратной связи), обеспечивающего отслеживание выходной переменной $x_1(t) = q_1(t)$ заданного сигнала $g(t)$. Вспомогательная задача, которая решается в данной работе, состоит в предварительной обработке заданного сигнала $g(t)$, который полагается негладким и зашумленным, а также в восстановлении его производных.

В общем случае для синтеза следящей системы третьего порядка (1) нужно знать производные задания до третьего порядка включительно. Например, с помощью комбинированного управления

$$u = -(c_1(x_1 - g) + c_2(x_2 - \dot{g}) + c_3(x_3 - \ddot{g}) + f(x) - \ddot{g})/b(x_1), c_{1,2,3} = \text{const} > 0$$

можно линеаризовать замкнутую систему:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = -c_1(x_1 - g) - c_2(x_2 - \dot{g}) - c_3(x_3 - \ddot{g}) + \ddot{g}.$$

В частном случае электромеханических систем, естественно, использовать разрывное управление, не требующего точного знания параметров системы (2), и, следовательно, функций $f(x)$ (3) и $b(x_1)$ [10]

$$u = -M \text{sign} b(x_1) \cdot \text{sign}(c_1(x_1 - g) + c_2(x_2 - \dot{g}) + c_3(x_3 - \ddot{g})), M, c_{1,2} = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Коэффициенты усиления и амплитуда разрывного управления выбираются так, чтобы обеспечить за конечное время возникновение скользящего режима на многообразии $c_1(x_1 - g) + c_2(x_2 - \dot{g}) + c_3(x_3 - \ddot{g}) = 0$. При этом понижается динамический порядок замкнутой системы, которая также принимает линеаризованный вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -c_1(x_1 - g) - c_2(x_2 - \dot{g}) + \ddot{g}.$$

В обоих случаях достигается асимптотическая сходимость выходной переменной к заданному сигналу $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = g(t)$ при условии, что задающее воздействие $g(t)$ является реализуемым.

Задающее воздействие считается допустимым для данного объекта управления, если оно задано в рабочей области выходной переменной объекта и является гладким. Значения производных задания не должны превышать физических ограничений на скорость и ускорение объекта, которые, в свою очередь, ограничены и зависят от технической реализации и мощности используемых приводов.

В общем случае в терминах канонической системы (1) эти ограничения имеют вид

$$\begin{aligned}|x_1^{(i)}(t)| &\leq X_i, |g^{(i)}(t)| \leq G_i < X_i, i = \overline{0, 4}; \\X_i^2 &\leq X_{i+1}, i = \overline{1, 3}.\end{aligned}\quad (5)$$

Для реализации разрывного управления (4) достаточно восстановить первую $\dot{g}(t)$ и вторую $\ddot{g}(t)$ производные задания. Именно этот случай примем за основу для дальнейшего изложения.

Будем полагать, что сигнал $g(t)$, поступающий в реальном времени из внешнего, автономного источника, является достижимым, но при этом частично удовлетворяет указанным требованиям к допустимым заданиям. Он находится в рабочей области выходной переменной, но является или непрерывным, но негладким, или кусочно-непрерывным (например, ступенчатым). При этом число особых точек (стыков или точек разрыва первого рода) конечно. В этих точках существуют левые и правые производные, которые не превышают допустимых значений, а именно:

$$|g(t)| \leq G_0 < X_0, |\dot{g}(t)| \leq G_1 < X_1. \quad (6)$$

Производные ступенчатого задания равны нулю $g^{(i)}(t) \equiv 0, i = 1 < 2, \dots$ и, с теоретической точки зрения, такое задание можно использовать в указанных законах управления. Однако частая смена положения рывками приведет к преждевременному износу механизма. Поэтому такое задание нужно предварительно сглаживать, чтобы продлить срок эксплуатации технического объекта. Сам сигнал и его аналитический вид заранее не известен, поэтому стандартные геометрические подходы для

сглаживания стыков и особых точек [11] здесь не применимы. Для получения гладкой траектории предлагается использовать автономную динамическую модель (следающий дифференциатор [12]). Для того чтобы сгладить сигнал и восстановить его первую и вторую производные, которые в общем случае не равны нулю, можно применить следающий дифференциатор или пониженного второго порядка, или полного динамического порядка, равного трем [6–7].

Как будет показано в следующем разделе, следающий дифференциатор представляет собой цепочку интеграторов, на вход которых подается внешний сигнал. Гипотеза исследования заключается в том, что следающий дифференциатор обеспечит естественную фильтрацию зашумленного сигнала, а также его производных, без установки дополнительных низкочастотных фильтров. Можно предположить, что с ростом порядка динамического дифференциатора фильтрующие свойства будут улучшаться.

В следующем разделе представлены процедуры синтеза следающих дифференциаторов различного порядка для обработки детерминированных сигналов без учета паразитных помех. Для проверки выдвинутой гипотезы будет проведено численное моделирование для сигналов с аддитивным шумом.

2. Процедуры настройки следающих дифференциаторов пониженного, полного и повышенного порядков

2.1. Синтез следающего дифференциатора пониженного порядка

Следающий дифференциатор пониженного порядка, сглаживающий внешний детерминированный сигнал $g(t)$ (6) и восстанавливающий его первую и вторую производные, имеет второй порядок и строится как копия первых двух уравнений канонической системы (1) в виде

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = v, \quad (7)$$

где $z_{1,2} \in R$ – переменные генератора, которые имитируют положение и скорость одноканального объекта управления, $\dot{z}_2(t)$ имитирует ускорение, $v \in R$ – корректирующее воздействие, которое выбирается в классе гладких функций так чтобы обеспечить отслеживание выходной переменной $z_1(t)$ заданного негладкого сигнала $g(t)$ с некоторой точностью и обеспечить выполнение физических ограничений на скорость и ускорение объекта управления (5), для которого предназначен этот сигнал

Для решения поставленной задачи используем процедуру декомпозиционного синтеза с сигмовидной локальной и обратной связи [13]. Используемая в дальнейших построениях сигма-функция и ее производная

$$m\sigma(kx) = m\left(\frac{2}{1 + \exp(-kx)} - 1\right), m\sigma(-kx) = -m\sigma(kx), -m < m\sigma(kx) < m; \quad (8)$$

$$m\sigma'(kx) = 0,5mk(1 - \sigma^2(kx)), m\sigma'(-kx) = m\sigma'(kx), 0 < m\sigma'(kx) \leq 0,5mk$$

определены на всей числовой оси, являются нелинейными, гладкими и ограниченными. В отличие от других логистических функций, таких как рациональная и корневая сигмоиды, арктангенс и др., сигма-функция, во-первых, более удобна для анализа устойчивости замкнутой системы, так как ее производная выражается рекурсивно через первообразную. Во-вторых, ее численная реализация не вызывает трудностей, так как соответствующий ряд Маклорена сходится на всей числовой оси.

С помощью двух положительных масштабирующих коэффициентов $m, k = \text{const} > 0$ сигма-функцию можно растягивать и сжимать вдоль вертикальной и горизонтальной осей соответственно.

Учитывая S-образную форму сигма-функции, введем на оси абсцисс две симметричные точки $\pm 2,2/k$, $m\sigma(\pm 2,2) \approx 0,8m$ [13], которые разделят сигма-функцию на три части. В центральной части в окрестности нуля сигма-функцию снизу можно ограничить снизу наклонной прямой, а в крайних интервалах – горизонтальными прямыми:

$$0,8mk|x|/2,2 \leq m|\sigma(kx)| \leq 0,8m, |x| \leq 2,2/k; \quad (9)$$

$$0,8m < m|\sigma(kx)| \leq m, |x| > 2,2/k.$$

Для синтеза следающей системы представим систему (7) относительно ошибки слежения $e_1 = z_1 - g$, введем следующие сигмовидные локальную и обратную связи

$$\begin{aligned} e_2 &= z_2 + m_1 \sigma(k_1 e_1), \\ v &= -m_2 \sigma(k_2 e_2), \quad m_i, k_i = \text{const} > 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Относительно новых переменных e_1, e_2 с учетом (8) получим замкнутую виртуальную систему

$$\dot{e}_1 = -m_1 \sigma(k_1 e_1) + e_2 - \dot{g}, \quad \dot{e}_2 = -m_2 \sigma(k_2 e_2) + \Lambda_1, \quad (11)$$

где $\dot{g}(t)$, $\Lambda_1(t) = \frac{d}{dt}(m_1 \sigma(k_1 e_1) = 0,5 m_1 k_1 (1 - \sigma^2(k_1 e_1)) \dot{e}_1$ рассматриваются как ограниченные возмущения. Их воздействие на выходную переменную (ошибку слежения) подавляется с помощью сигмовидных корректирующих воздействий. Как показано в работе [14], сигмиды являются гладкими допредельными реализациями разрывных управлений и обеспечивают в замкнутой системе аналогичные свойства, в том числе, инвариантность по отношению к ограниченным согласованным возмущениям.

Выбором начальных значений переменных следящего дифференциатора в виде $z_1(0) = g(0)$, $z_2(0) = 0$ будут обеспечены нулевые начальные условия в виртуальной системе (11). Таким образом, переменные этой системы при $t = 0$ находятся в областях

$$|e_1(t)| = |z_1(t) - g(t)| \leq 2,2/k_1, \quad |e_2(t)| = |z_2(t) + m_1 \sigma(k_1 e_1(t))| \leq 2,2/k_2. \quad (12)$$

Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить выполнение неравенств (12) при $t \geq 0$. С этой целью формализуем достаточные условия устойчивости замкнутой системы (11). Вне областей (12) с учетом (6), (8), (9) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} e_1 \dot{e}_1 &= e_1(e_2 - \dot{g} - m_1 \sigma(k_1 e_1)) \leq |e_1|(|e_2| + G_1 - 0,8m_1), \\ e_2 \dot{e}_2 &= e_2(0,5m_1 k_1 (1 - \sigma^2(k_1 e_1)) \dot{e}_1 - m_2 \sigma(k_2 e_2)) \leq |e_2|(m_1^2 k_1 - 0,8m_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Достаточные условия выполнения неравенств (12) $e_i \dot{e}_i < 0, i = 1, 2$ и одновременное выполнение ограничений (5) на производные задающего воздействия (и, следовательно, на переменные $z_2(t)$, $v(t)$ и $\dot{v}(t) = 0,5m_2 k_2 (1 - \sigma^2(k_2 e_2)) \dot{e}_2$) обеспечиваются выбором масштабирующих коэффициентов m_1, m_2 и k_1, k_2 на основе системы двойных неравенств

$$\begin{cases} G_1 + 2,2/k_2 < 0,8m_1 \leq 0,8X_1, \\ m_1^2 k_1 < 0,8m_2 \leq 0,8X_2, \\ m_2^2 k_2 < 0,8X_3. \end{cases} \quad (14)$$

Система неравенств (14) полагается совместной. Это следует из априорных предположений (5). Максимальное допустимое значение k_1 определяет возможную точность отслеживания (12).

В итоге следящий дифференциатор с сигмовидной коррекцией (10) принимает вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -m_2 \sigma(k_2 e_2) = -m_2 \sigma(k_2 (z_2 + m_1 \sigma(k_1 (z_1 - g)))). \quad (15)$$

На вход системы (15), которая функционирует автономно от объекта управления, поступает внешний сигнала $g(t)$. При выполнении условий (14) переменные данной динамической системы будут порождать в реальном времени автоматически сглаженные сигналы (новое задающее воздействие и его производные), которые передаются в регулятор объекта. При наличии следящего генератора (7) закон разрывного управления (4) будет реализован в следующем виде

$$u = -M \text{sign} b(x_1) \cdot \text{sign}(c_1(x_1 - z_1) + c_2(x_2 - z_2) + x_3 + m_2 \sigma(k_2 (z_2 + m_1 \sigma(k_1 (z_1 - g))))).$$

Следящий дифференциатор пониженного (второго) порядка (15), с одной стороны, дает меньшую вычислительную нагрузку на информационно-управляющую систему. С другой стороны, вторая производная задания здесь вычисляется алгебраически. Она лишена естественной фильтрации, которая возникает при интегральном расчете. Поэтому следует ожидать неудовлетворительное качество этого сигнала, если $g(t)$ содержит шумовые помехи.

Эту проблему можно решить с помощью установки дополнительных низкочастотных фильтров внешнего зашумленного сигнала перед его подачей в следящий дифференциатор и/или

непосредственно на вторую производную $\dot{z}_2(t)$ перед ее подачей в регулятор объекта [7]. В данной работе мы предлагаем другой подход, который обеспечит естественную фильтрацию восстанавливаемой второй производной задания путем увеличения динамического порядка (числа интегрирующих звеньев) следящего дифференциатора.

2.2. Синтез следящего дифференциатора общего вида

Основываясь на результатах, полученных в предыдущем подразделе, приведем кратко процедуру синтеза следящего дифференциатора n -го порядка, который имеет следующий канонический вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, i = \overline{1, n-1}; \dot{z}_n = v, \\ z_1(0) &= g(0), z_i(0) = 0, i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $z_i \in R$ – переменные генератора, $z_1(t)$ имитирует положение одноканального объекта управления, $z_i(t)$ ($i = \overline{2, n}$) – производные $(i-1)$ -го порядка, $\dot{z}_n(t)$ при необходимости можно использовать как производную задания n -го порядка, $v \in R$ – гладкое корректирующее воздействие, которое выбирается в классе гладких функций так чтобы обеспечить отслеживание выходной переменной $z_1(t)$ заданного негладкого сигнала $g(t)$ с некоторой точностью и обеспечить выполнение физических ограничений на производные задающего воздействия (5).

Для обоснования формы корректирующего воздействия и настройки его параметров перейдем к новым переменным – ошибке слежения $e_1 = z_1 - g$ и, аналогично (10), введем локальные сигмовидные связи и сигмовидную коррекцию

$$\begin{aligned} e_i &= z_i + m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), i = \overline{2, n} \\ v &= -m_n\sigma(k_n e_n), m_i, k_i = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Относительно новых переменных (17) получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -m_1\sigma(k_1 e_1) + e_2 - \dot{g}, \\ \dot{e}_i &= -m_i\sigma(k_i e_i) + e_{i+1} + \Lambda_{i-1}, i = \overline{2, n-1}, \\ \dot{e}_n &= -m_n\sigma(k_n e_n) + \Lambda_{n-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\dot{g}(t)$, $\Lambda_i(t) = \frac{d}{dt}(m_i\sigma(k_i e_i)) = 0,5m_i k_i (1 - \sigma^2(k_i e_i))\dot{e}_i$, $i = \overline{1, n-1}$ рассматриваются как ограниченные возмущения, при нулевых начальных условиях $e_i(0) = 0$, справедливы оценки $|\Lambda_i(t)| \leq m_i^2 k_i$, $i = \overline{1, n}$.

Цель управления состоит в стабилизации с некоторой точностью ошибки слежения и невязок (17):

$$|e_i(t)| = |z_1(t) - g(t)| \leq 2,2/k_1, |e_i(t)| = |z_i(t) + m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}(t))| \leq 2,2/k_i, i = \overline{2, n}, t \geq 0. \quad (19)$$

Достаточные условия выполнения неравенств (19), которые дают нижние оценки для выбора масштабирующих коэффициентов сигмовидной коррекции, получим аналогично (13):

$$\begin{aligned} 0,8m_1 > 2,2/k_2 + G_1 &\Rightarrow e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - \dot{g} - m_1\sigma(k_1 e_1)) \leq |e_1|(2,2/k_2 + G_1 - 0,8m_1) < 0; \\ 0,8m_i > 2,2/k_{i+1} + m_{i-1}^2 k_{i-1} &\Rightarrow e_i \dot{e}_i = e_i(e_{i+1} + \Lambda_{i-1} - m_i\sigma(k_i e_i)) \leq \\ &\leq |e_i|(2,2/k_{i+1} + m_{i-1}^2 k_{i-1} - 0,8m_i) < 0, i = \overline{2, n-1}; \\ 0,8m_n > m_{n-1}^2 k_{n-1} &\Rightarrow e_n \dot{e}_n = e_n(\Lambda_{n-1} - m_n\sigma(k_n e_n)) \leq |e_n|(m_{n-1}^2 k_{n-1} - 0,8m_n) < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Предположим, что имеются проектные ограничения вида (5) на производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Тогда система двойных неравенств, аналогичная (14), имеет вид

$$\begin{cases} G_1 + 2,2/k_2 < 0,8m_1 \leq 0,8X_1, \\ m_{i-1}^2 k_{i-1} + 2,2/k_{i+1} < 0,8m_i \leq 0,8X_i, i = \overline{2, n-1}; \\ m_{n-1}^2 k_{n-1} < 0,8m_n \leq 0,8X_n, \\ m_n^2 k_n < 0,8X_{n+1}. \end{cases} \quad (21)$$

Следящий дифференциатор (16) с сигмоидальной коррекцией (17) будет реализован в виде замкнутой системы

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, i = \overline{1, n-1}; \dot{z}_n = -m_n \sigma(k_n e_n). \quad (22)$$

Из целевых условий (19) следует, что при выборе масштабирующих коэффициентов $m_i, i = \overline{1, n}$ на основе (21) переменные дифференциатора $z_i, i = \overline{2, n}$, которые поступят в систему регулятор объекта в качестве соответствующих производных задающих воздействий, будут допустимыми по величине и достаточно гладкими.

Если для закона управления нужно восстановить первую и вторую производные задания, то следящий дифференциатор (16) при $n = 3$ является полноразмерным (по числу сглаживаемых переменных $g(t), \dot{g}(t), \ddot{g}(t)$). При этом закон разрывного управления (4) будет реализован в виде

$$u = -M \text{sign} b(x_1) \cdot \text{sign}(c_1(x_1 - z_1) + c_2(x_2 - z_2) + x_3 - z_3). \quad (23)$$

Для восстановления первой и второй производной задания следящий дифференциатор (16) при $n = 4$ имеет расширенный порядок. В этом случае закон управления (4) также будет реализован в виде (23), но при этом следует ожидать лучшее качество (гладкость) оценочного сигнала второй производной. При зашумленном внешнем сигнале увеличение динамического порядка следящего дифференциатора будет способствовать лучшей фильтрации. Качество фильтрации напрямую зависит от числа интеграторов, которые отделяют оцениваемую переменную от зашумленного входа. Учитывая, что алгоритмы динамической обработки (22) внешнего сигнала $g(t)$ реализуются в реальном времени, следует искать разумный компромисс между качеством фильтрации и временем счета алгоритма. Оно увеличивается с повышением динамического порядка и при слишком большом n может привести к ощутимому запаздыванию.

Другой компромисс связан с выбором коэффициентов усиления $k_i, i = \overline{1, n}$ из допустимого диапазона (21). С их увеличением увеличивается точность стабилизации ошибок слежения и невязок (19), но фильтрующие свойства внешнего сигнала ухудшаются. Это известная проблема, которая в фильтрах Калмана разрешается путем решения оптимизационной задачи [1].

В следующем разделе мы проведем численные эксперименты обработки зашумленного внешнего сигнала с помощью следящих дифференциаторов пониженного, полного и повышенного порядков с целью исследования их фильтрующих свойств.

3. Моделирование

Численное моделирование разработанных следящих дифференциаторов различной размерности выполнялось в среде MATLAB-Simulink с постоянным шагом интегрирования 10^{-3} . Для конкретности было принято задающее воздействие для углового положения звена одноканального электромеханического объекта (2) в допустимом диапазоне $q_1 \in [-\pi; \pi]$ при следующих значениях проектных ограничений (5):

$$X_1 = 2, X_2 = 14, X_3 = 24. \quad (24)$$

Рассматривалась проблема сглаживания и фильтрации зашумленного сигнала

$$\bar{g}(t) = g(t) + \eta(t), \quad (25)$$

где паразитная компонента $\eta(t)$ является нормальной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0,1, она генерируется с помощью блока Simulink "Random Number" (рис.1). Полезный сигнал $g(t)$ полагается кусочно-непрерывным, для моделирования принята следующая ступенчатая функция в следующем виде:

$$g(t) = \begin{cases} \pi/2, & t \in [0; 8); \\ -\pi, & t \in [8; 16); \\ \pi/4, & t \in [16; 24); \\ -\pi/8, & t \geq 24[c]. \end{cases} \quad (26)$$

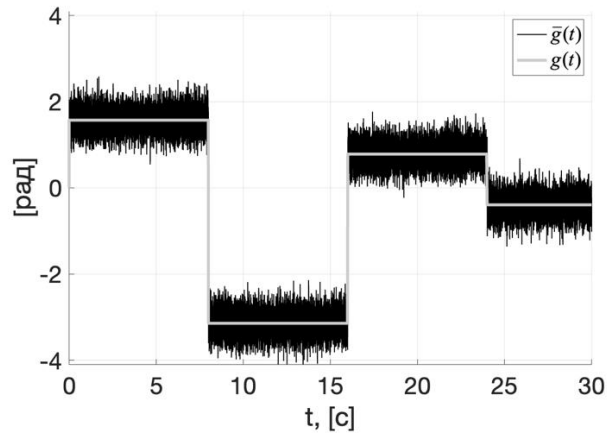


Рис. 1. График задающего $g(t)$ (26) и зашумленного $\bar{g}(t)$ (25) сигналов

Конечно, производные функции (26) равны нулю, но вид функции задания априори не известен. Мы намерено приняли для вычислительных экспериментов постоянные сигналы с аддитивными помехами, так как они хуже переменных сигналов поддаются фильтрации.

На основе систем неравенств (14), (20) и (21) для редуцированного следящего дифференциатора (15), а также для следящих дифференциаторов полного и повышенного порядков (22) были приняты следующие числовые значения масштабирующих коэффициентов:

$$m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 40, m_4 = 500, k_1 = 1.2, k_2 = 1.1, k_3 = 1, k_4 = 0.9.$$

На входы дифференциаторов подавался зашумленный сигнал (25). На рис. 2 показан график полезного сигнала $g(t)$ (26), задающего угловое положение звена манипулятора, и его отработка (сглаживание) выходной переменной $z_1(t)$ следящих дифференциаторов пониженного порядка, равного двум, полного порядка, равного трем, и повышенного порядка, равного четырем. На рис. 3 для указанных следящих дифференциаторов показаны графики переменных $z_2(t)$, восстанавливающих скорость задающего воздействия. На рис. 4 показаны графики переменных следящих дифференциаторов, восстанавливающие ускорение задающего воздействия. Для дифференциатора пониженного порядка – это переменная $\dot{z}_2(t)$, для дифференциаторов полного и повышенного порядка – это переменная $z_3(t)$.

В Таблице 1 представлены максимальные по модулю отклонения от нуля ошибок слежения, а также первых и вторых восстанавливаемых производных всех трех следящих дифференциаторов.

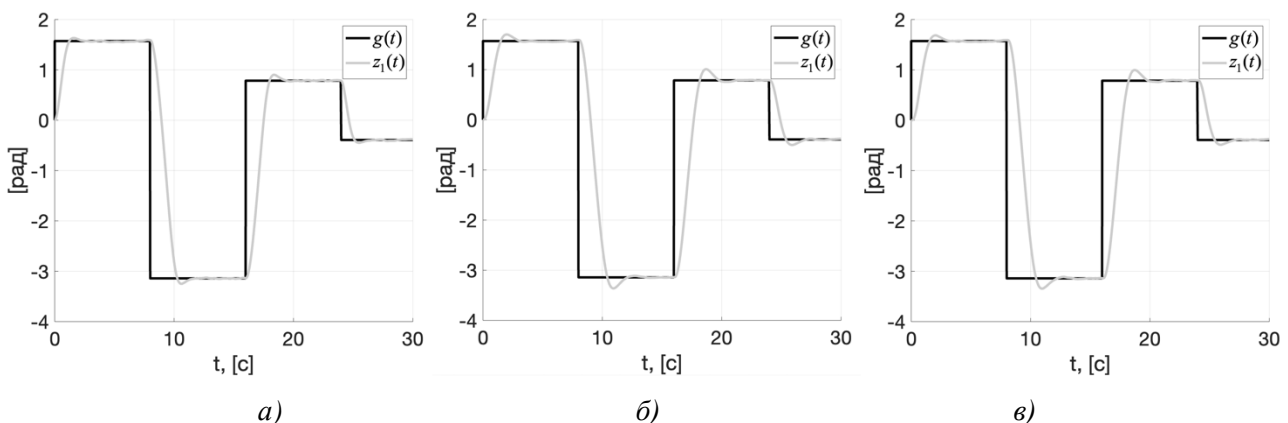


Рис. 2. Графики внешнего сигнала $g(t)$ (26) и выходных переменных $z_1(t)$ следящих дифференциаторов пониженного (а), полного (б) и повышенного (в) порядков, имитирующих угловые положения звена манипулятора

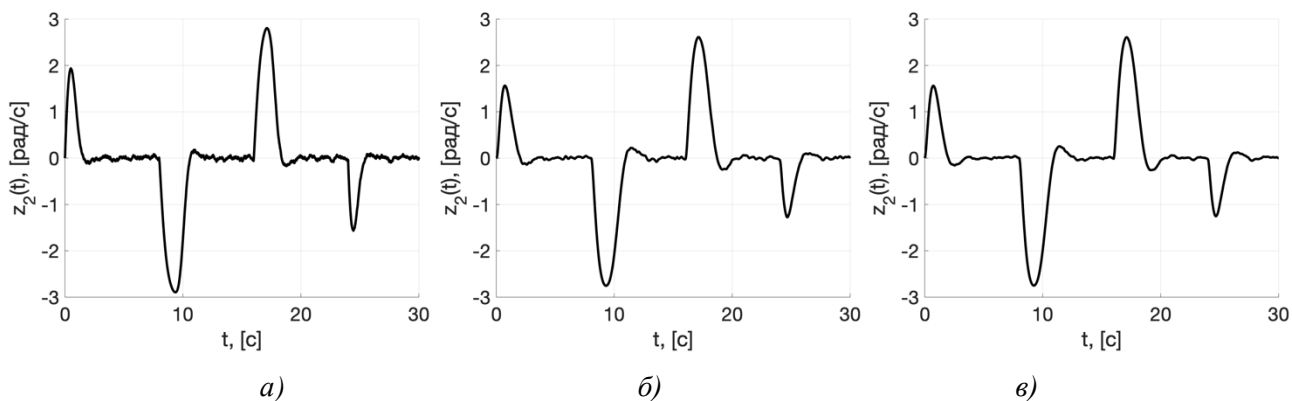


Рис. 3. Графики переменных $z_2(t)$, имитирующих угловую скорость звена манипулятора, следящих дифференциаторов пониженного (а), полного (б) и повышенного (в) порядков

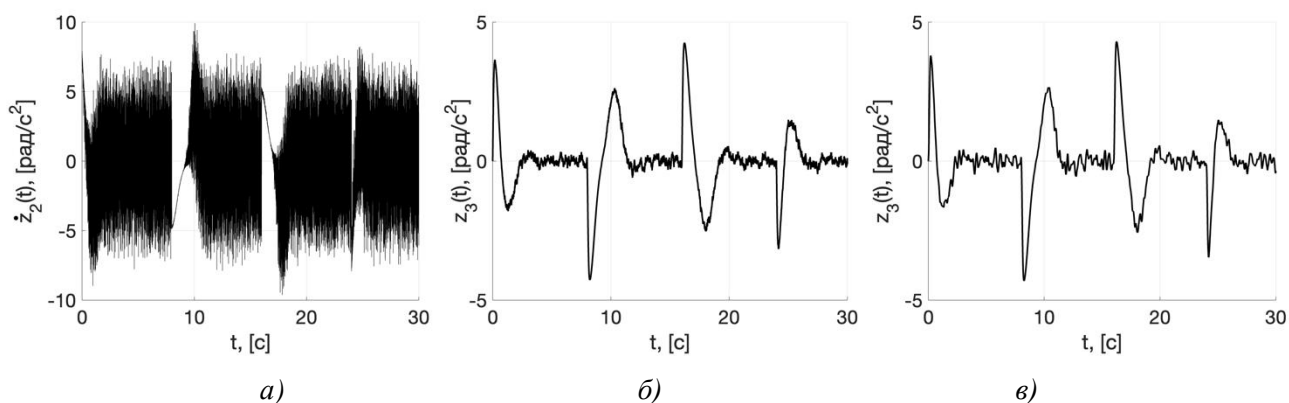


Рис. 4. Графики переменных, имитирующих ускорение движения звена манипулятора, следящего дифференциатора пониженного (а), полного (б) и повышенного (в) порядков

Таблица 1. Значения отклонений

Параметр	Следящий дифференциатор пониженного порядка	Следящий дифференциатор полного порядка	Следящий дифференциатор повышенного порядка
Максимальная по модулю ошибка слежения $e_1 = z_1 - g$	4.734	4.734	4.733
Максимальная по модулю ошибка слежения в установившемся режиме	0.016	0.016	0.018
Максимальное по модулю отклонение от нуля первой производной $z_2(t)$	2.89	2.76	2.75
Максимальное по модулю отклонение от нуля второй производной $\dot{z}_2(t) / z_3(t)$	9.9	4.3	4.3

Как видно из рис. 2, все три дифференциатора справляются с основной поставленной задачей, а именно, фильтрацией на выходе внешнего зашумленного сигнала и его сглаживанием. Из рис. 3 видно, что качество фильтрации у всех трех методов является допустимым. Однако, у редуцированного следящего дифференциатора (15) пиковые значения переменной $z_2(t)$, имитирующей скорость реального объекта управления, несколько выше, чем у соответствующих переменных следящих дифференциаторов полного и повышенного порядков, что связано с наличием у них дополнительных интегрирующих звеньев. Как видно из рисунка 4,а, при использовании следящего дифференциатора пониженного порядка фильтрация второй производной отсутствует. Поэтому редуцированный дифференциатор нельзя использовать для восстановления второй производной, если внешний сигнал зашумлен. С фильтрацией второй производной лучше

справляется дифференциатор повышенного порядка, в котором зашумленный вход отделен от восстанавливаемого сигнала $z_3(t)$ дополнительным интегратором. Однако, разница между восстановленными сигналами второй производной у дифференциаторов полного и повышенного порядков незначительная. В дальнейшем повышении динамического порядка дифференциатора, в общем случае, нет необходимости. Можно сделать вывод о том, что для удовлетворительной фильтрации достаточно хотя бы одного дополнительного интегрирующего звена.

4. Заключение

Рассматривалась проблема обработки зашумленного сигнала с помощью канонических динамических моделей (цепочек интеграторов) различного порядка с сигмовидной коррекцией. В настройку ее параметров закладываются физические ограничения объекта управления. Показано, что переменные дифференциатора при отслеживании негладкого и зашумленного внешнего сигнала на выходе порождают сглаженный естественным образом незашумленный сигнал, который поступает в качестве нового задания на объект управления.

Установлена взаимосвязь между динамическим порядком дифференциатора и качеством фильтрации порождаемых им сигналов. Показано, что выходные переменные дифференциаторов пониженного, полного и повышенного порядков порождают допустимые положения и первые производные заданной траектории. Следящий дифференциатор пониженного порядка показал плохую производительность с точки зрения качества фильтрации второй производной. Данная проблема решается в следящих дифференциаторах полного и повышенного порядков, в которых входной зашумленный сигнал отделен от оценочных сигналов дополнительными интегрирующими звеньями. Их количество напрямую влияет на качество фильтрации производных внешнего сигнала. Однако по результатам моделирования можно сделать вывод о том, что в случае необходимости для синтеза обратной связи в объекте производных задания до второго порядка включительно будет вполне достаточно следящего дифференциатора полного порядка.

Литература

1. *Sharifi M.A., Seif M.R., Hadi M.A.* Comparison between numerical differentiation and Kalman filtering for a Leo satellite velocity determination // *Artificial Satellites*. 2013. Vol. No. 3. – P. 103-110.
2. *Alsanousi A.A.* Design and optimization of low pass filter. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 128 p.
3. *Емельянов С.В., Афанасьев А.П.* Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования // *Автоматика и телемеханика*. 2015. № 12. – С. 27-42.
4. *Levant A., Livne M., Yu X.* Sliding-mode-based differentiation and its application // *IFAC PapersOnLine*. 2017, Vol. 50, No. 1. – P. 1699-1704.
5. *Кожушко Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями // *Автоматика и телемеханика*. 2021. № 7. – С. 37-68.
6. *Antipov A.S., Kokunko Y.G., Krasnova S.A.* Dynamic models design for processing motion reference signals for mobile robots // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. 2022. Vol. 105, Iss. 4. – P. 77 (1-16).
7. *Antipov A.S., Kokunko Y.G., Krasnova S.A., Utkin V.A.* Dynamic smoothing, filtering and differentiation of signals defining the path of the UAV // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Iss. 23. – P. 9472 (1-25).
8. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних несогласованных возмущений // *Проблемы управления*. 2014. № 6. – С. 22-30.
9. *Angeli D.* Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback // *Automatica*. 2001. Vol. 37. – P. 1103-1108.
10. *Краснов Д.В., Антипов А.С.* Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности // *Проблемы управления*. 2021. № 4. – С. 27-39.
11. *Pan J., Zhang L., Manocha D.* Collision-free and smooth trajectory computation in cluttered environments // *International Journal of Robotics Research*. 2021. Vol. 31, No. 10. – P. 1155-1175.
12. *Ibraheem I.K., Abdul-Adheem W.R.* On the improved nonlinear tracking differentiator based nonlinear PID controller design // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2016. Vol. 7, No. 10. – P. 234–241.
13. *Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А.* Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // *Автоматика и телемеханика*. 2022. № 1. – С. 40-66.
14. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // *Проблемы управления*. 2015. № 5. – С. 27-36.