

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ВЕТРОГЕНЕРАТОРА ДАРЬЕ

Кирсанова А.С.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
askirsanova99@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель малого ветрогенератора с вертикальной осью, так называемого ветрогенератора Дарье. Установлены условия существования релаксационных колебаний и траекторий-уток. Показано, что существует критическое значение параметра, характеризующего внешнее сопротивление.

Ключевые слова: математическое моделирование; динамические модели; ветрогенератор; траектории-утки; релаксационные колебания; сингулярные возмущения; инвариантные многообразия.

Введение

Развитие ветроэнергетики в современном мире является актуальным вопросом из-за ряда причин. Во-первых, ветроэнергетика является одним из наиболее экологически чистых видов производства энергии, не выбрасывающим вредные вещества в атмосферу и не загрязняющим окружающую среду. Во-вторых, в связи с уменьшением запасов традиционных источников энергии, таких как нефть и газ, становится все более актуальным поиск альтернативных источников энергии. Ветроэнергетика может стать одним из таких источников, позволяющим уменьшить зависимость от нефти и газа. В-третьих, ветроэнергетика имеет большой потенциал для развития во многих регионах мира, где есть достаточно сильный ветер. В целом, ветроэнергетика является одним из наиболее перспективных направлений развития энергетической отрасли в современном мире.

Модель малого ветрогенератора рассматривалась в статьях [1-5]. В работах [1, 2] описываются механизмы антипараллелограмма и колебательного типа ветроэнергетических установок. В [3-5] исследуется динамика и стационарные режимы генераторов ветротурбинных установок с помощью качественных методов теоретической механики. Рассмотрены вопросы существования, устойчивости и оптимизации установившихся режимов. Также описаны различные аспекты конструктивной теории малых ветроэлектростанций [6-7].

В данной статье рассматривается конкретная модель ветрогенератора. Исследуется трехмерная математическая модель, при этом изучается один из самых простых вариантов изменения внешнего сопротивления.

1. Математическая модель

Рассматривается математическая модель малого ветрогенератора Дарье, которая представляет собой трехтемповую дифференциальную систему:

$$\begin{cases} J\dot{\Omega} = -kI + M(\Omega), \\ Li = k\Omega - (R + r)I, \\ \dot{R} = \varepsilon F(\Omega, I, R), \end{cases} \quad (1)$$

где J – момент инерции турбины, L – индуктивность якоря, I – сила тока в обмотке якоря, Ω – коэффициент быстроходности, R – внешнее сопротивление, M – относительный момент аэродинамических сил. Остальные константы: k – коэффициент электромеханического взаимодействия, r – малое внутреннее сопротивление якоря. Величины L и ε рассматриваются, как малые параметры. Это означает, что в данной системе переменная I является самой быстрой, R самой медленной из трех переменных. Здесь точка означает производную по времени t . Функция $M(\Omega)$ задается графиком, основанном на экспериментальных данных, представленных на рис. 1 и 2.

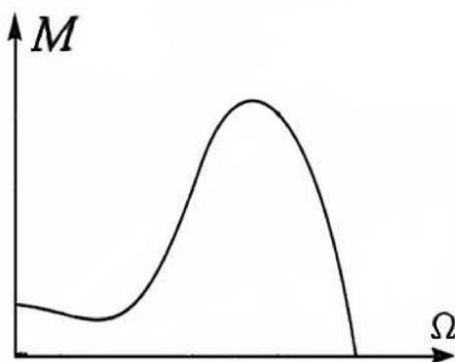


Рис. 1. График зависимости аэродинамического момента от коэффициента быстроходности

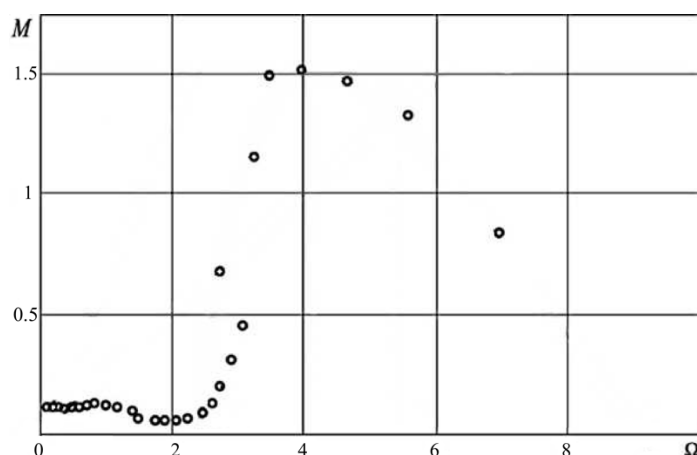


Рис. 2. Экспериментальные данные

2. Основные результаты

1.1. Аппроксимация функции $M(\Omega)$

Рассматривается график экспериментальных данных представленный на рис. 1, 2. Коэффициент быстроходности представлен в безразмерной форме [3], то есть:

$$\Omega = \frac{b\omega}{V}, \quad (2)$$

где ω — угловая скорость, b — расстояние от эффективного давления лопастей до оси вращения, V — скорость воздуха. При построении кусочно-линейной аппроксимации функции аэродинамического момента используется программа «КОМПАС» для получения более точных значений из графика экспериментальных данных (рис. 2). Непрерывная функция $M(\Omega)$ задается кусочно-линейным образом по промежуткам:

$$\Omega \in [0; 0,86]; [0,86; 1,8]; [1,8; 4]; [4; 8,64].$$

В результате получается следующее задание функции $M(\Omega)$:

$$M(\Omega) = \begin{cases} 0,02906976745\Omega + 0,12, & \text{где } \Omega \in [0; 0,86]; \\ -0,0638297872\Omega + 0,199893617, & \text{где } \Omega \in [0,86; 1,8]; \\ 0,643181818\Omega - 1,0727272725, & \text{где } \Omega \in [1,8; 4]; \\ -0,28556034485\Omega + 2,6422413795, & \text{где } \Omega \in [4; 8,64]. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 3 представлен график полученной функции $M(\Omega)$.

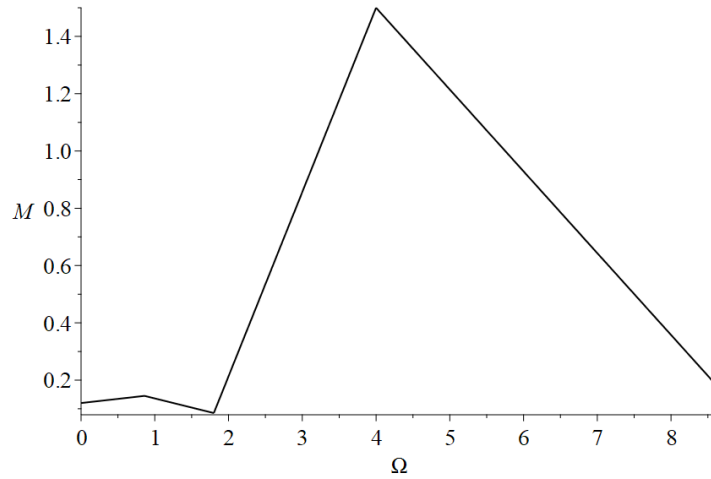


Рис. 3. График функции $M(\Omega)$, заданный (3)

Используется достаточно грубая аппроксимация момента аэродинамических сил, но следует заметить, что если делается существенно более точная аппроксимация, то это не вносит никаких принципиальных изменений в качественное поведение решений дифференциальной системы.

1.2. Медленная кривая

Система (1) является сингулярно возмущенной, так как малый параметр L умножается на производную силы тока. Система (1) имеет двумерное инвариантное многообразие [8, 9]

$$I = h(R, \Omega, \varepsilon). \quad (4)$$

Функция h может быть найдена из уравнения инвариантности:

$$L \frac{\partial h}{\partial R} \varepsilon F(\Omega, h, R) + L \frac{\partial h}{\partial \Omega} \dot{\Omega} (-kh + M(\Omega)) = k\Omega - (R + r)h. \quad (5)$$

Пренебрегая членами порядка $O(L)$, получается:

$$h = \frac{k(\Omega)}{R+r}. \quad (6)$$

Движение по инвариантному многообразию описывается дифференциальной системой:

$$\begin{cases} J\dot{\Omega} = -\frac{k^2\Omega}{R+r} + M(\Omega), \\ \dot{R} = \varepsilon F(\Omega, I, R). \end{cases} \quad (7)$$

Полученная система является быстро-медленной, так как правая часть уравнения для медленной переменной R умножается на малый параметр ε . Это обстоятельство позволяет применить для ее анализа аппарат теории релаксационных колебаний [10] и теории траекторий-уток (см., например [11]). Медленная кривая системы (7) задается уравнением:

$$-\frac{k^2\Omega}{R+r} + M(\Omega) = 0. \quad (8)$$

Из (8) можно выразить R и получить уравнение медленной кривой в явной форме:

$$R = R(\Omega) = \frac{k^2\Omega}{M(\Omega)} - r. \quad (9)$$

График медленной кривой представлен на рис. 4, при $k = 0,5$, $r = 0,1$.

Для исследования устойчивости медленной кривой (9) следует найти производную функции $R(\Omega)$. Непосредственный анализ показывает, что устойчивыми являются участки медленной кривой, соответствующие промежуткам:

$$\Omega \in [0; 0,86]; [0,86; 1,8]; [4; 8,64],$$

а неустойчивый участок соответствует промежутку

$$\Omega \in [1,8; 4].$$

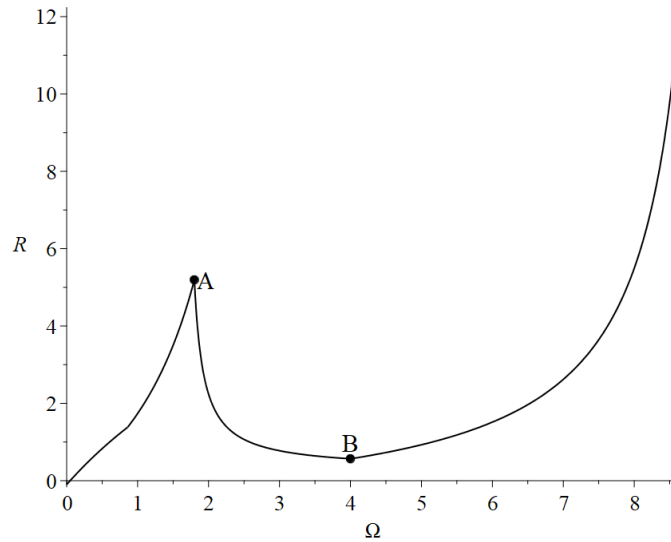


Рис. 4. График медленной кривой, заданной уравнением (9)

Медленная кривая имеет 2 точки срыва: $A (1,8; 5,194117653)$ и $B (4; 0,5666666669)$, соответствующие точкам ее экстремумов (см. Рис. 4). Точки A и B являются точками смены устойчивости.

1.3. Релаксационный цикл, траектория-утка

Пусть $F(\Omega, I, R) = \varepsilon(\alpha - \Omega)$. Тогда система уравнений (7) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} J\dot{\Omega} = -\frac{k^2\Omega}{R+r} + M(\Omega), \\ \dot{R} = \varepsilon(\alpha - \Omega). \end{cases} \quad (10)$$

Положения равновесия системы (10) на каждом участке находятся из уравнений

$$\begin{cases} -\frac{k^2\Omega}{R+r} + M(\Omega) = 0, \\ \varepsilon(\alpha - \Omega) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

которые удобно записать в форме

$$\begin{aligned} R &= \frac{k^2\Omega}{M(\Omega)} - r, \\ \Omega &= \alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате, при задании $M(\Omega)$ уравнением (3) и $k = 0,5$, $r = 0,1$, получаются следующие выражения для координаты R в положениях равновесия:

$$R = \begin{cases} \frac{k^2\alpha}{0,02906976745\alpha+0,12} - r, & \text{где } \alpha \in [0; 0,86]; \\ \frac{k^2\alpha}{-0,0638297872\alpha+0,199893617} - r, & \text{где } \alpha \in [0,86; 1,8]; \\ \frac{k^2\alpha}{0,643181818\alpha-1,0727272725} - r, & \text{где } \alpha \in [1,8; 4]; \\ \frac{k^2\alpha}{-0,28556034485\alpha+2,6422413795} - r, & \text{где } \alpha \in [4; 8,64]. \end{cases} \quad (13)$$

Если положение равновесия лежит на устойчивом участке $\alpha > \alpha_{cr}$, то оно будет асимптотически устойчивым. Если же положение равновесия находится на неустойчивом участке, то в системе наблюдается релаксационный цикл, то есть траектория сначала идет вдоль одного устойчивого участка до точки срыва, далее срывается и переходит в ε -окрестность другого устойчивого участка, следует вдоль него до второй точки срыва, после которого возвращается на первый устойчивый участок. Понятно, что режим работы ветрогенератора соответствующий релаксационному циклу не является приемлемым с практической точки зрения. Между устойчивым положением равновесия и релаксационном циклом существуют переходные режимы. Значения параметра α , соответствующие точкам срыва называются критическими. В зависимости от изменения значения параметра α меняется положение особой точки на медленной кривой. При изменении значения параметра α , особая точка

проходит точку экстремума и при этом теряет устойчивость, что соответствует бифуркации Андронова-Хопфа, то есть, при прохождении параметра α через бифуркационное значение (рис. 5а) устойчивое положение равновесия дифференциальной системы становится неустойчивым. Хотя это известный сценарий рождения цикла, но отличие заключается в том, что развитие размеров цикла происходит по взрывному сценарию. Важно отметить, что рассматриваемая модель (10) обладает свойством исключительно высокой чувствительности по отношению к изменению параметра α в окрестности критических значений. В теории траекторий-уток есть факт, который формулируется так: «жизнь уток коротка». Смысл этого утверждения состоит в том, что переход от малого цикла до релаксационного соответствует изменению параметра α на промежутке величиной порядка $\exp(-1/c\varepsilon)$, $c > 0$. Таким образом, при незначительном изменении параметра происходит очень быстрый переход от предельного цикла малой амплитуды к релаксационному циклу (рис. 5-6).

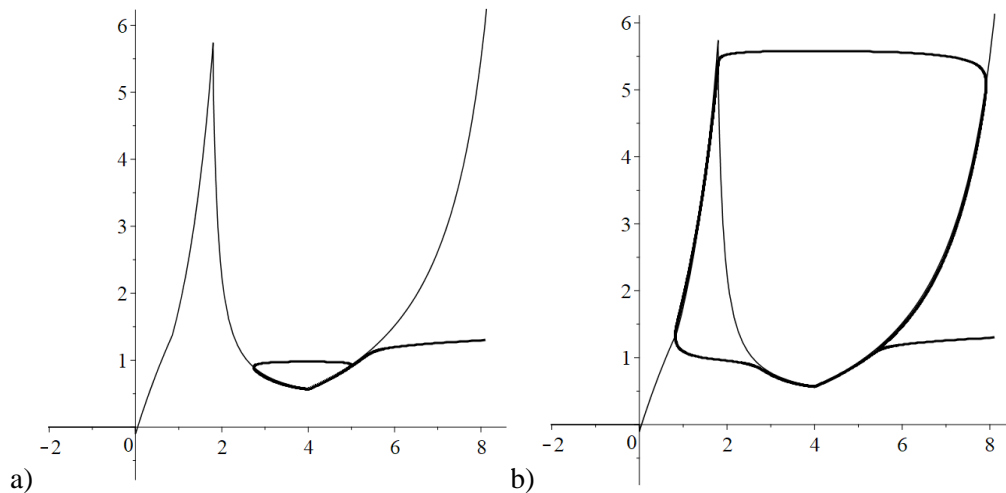


Рис. 5. Медленная кривая (тонкая линия) и траектория системы (жирная линия) при $\varepsilon = 0,01$; $k=0,25$; $r=0,1$; $J=1$; а) $\alpha = 3,999654699$; б) $\alpha = 3,99965469$; начальная точка: $\Omega(0) = 8,1$, $R(0) = 1,3$

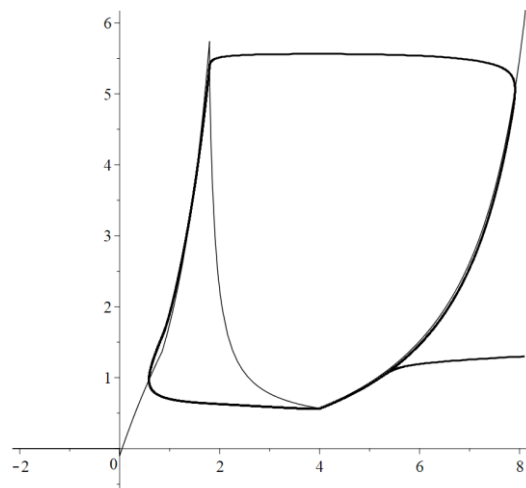


Рис. 6. Медленная кривая (тонкая линия) и предельный цикл (жирная линия) при $\varepsilon = 0,01$; $k=0,25$; $r=0,1$; $J=1$; $\alpha = 3,9$; начальная точка: $\Omega(0) = 8,1$, $R(0) = 1,3$

3. Заключение

Рассмотрена трехмерная математическая модель ветрогенератора Дарье. При кусочно-линейной аппроксимации аэродинамического момента найдены условия возникновения режимов работы ветрогенератора, соответствующих траекториям-уткам и релаксационным колебаниям.

Автор глубоко признателен профессору Кобрину А. И. за постановку задачи и ценные советы.

Литература

1. *Климина Л.А., Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д.* О динамике ветроэнергетической установки с рабочим элементом на основе механизма антипараллелограмма // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. N 8. – С. 536–540.
2. *Андронов П.Р., Досаев М.З., Дынникова Г.Я., Селюцкий Ю.Д., Стрекалов С.Д.* Моделирование ветродвигателя колебательного типа // Проблема машиностроения и надёжности машин. 2009. N 4. – С. 86–91.
3. *Досаев М.З., Линь Ч.Х., Лю В.Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Качественные анализ стационарных режимах малых ветровых электростанции // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. N 3. – С. 368–374.
4. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О динамике малой ветроэлектростанции // Доклады академии наук. 2007. Т. 416. 1. – С. 50–53.
5. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Лю В.Л., Линь Ч.Х.* Бифуркации режима функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизации их характеристик // Механика твёрдого тела. 2009. N 2. – С. 59–66.
6. *Кобрин А.И.* Конструктивная теория МВЭУ. Часть I (главы I-II). / А.И. Кобрин, М.З. Досаев, Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов, С.Ю. Селюцкий. – М.: Изд-во Московского Университета, 2007. – 76 с.
7. *Кобрин А.И.* Конструктивная теория МВЭУ. Часть II (глава III). / А.И. Кобрин, М.З. Досаев, Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов, С.Ю. Селюцкий. – М.: Изд-во Московского Университета, 2007. – 88 с.
8. *Воропаева Н.В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2009. – 256 с.
9. *Курина Г.А., Калашикова М.А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. N 11. – С. 3–61.
10. *Мищенко Е.Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания // Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
11. *Соболев В.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепкина. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2010. – 320 с.