DOI: 10.25728/mlsd.2023.0554

# ПРИБЛИЖЕНИЕ К АСИМПТОТИКЕ РЕГУЛЯТОРА В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ НА ОСНОВЕ СХОДЯЩЕГОСЯ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА[1]

**Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.**

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*

mdmitriev@mail.ru, makarov@isa.ru

*Аннотация. В работе рассматривается построение асимптотических разложений в сингулярно возмущенной слабо нелинейной задаче управления с целью построения приближенного регулятора. Они используются для построения интерполяционных и экстраполяционных процедур и получаются с помощью применения техники SDRE и анализа сходящегося итерационного процесса. Проведенные эксперименты показали работоспособность предложенного подхода.*

*Ключевые слова: асимптотические методы, сингулярно возмущенные задачи управления, малый параметр, итерационные алгоритмы, регулятор, техника SDRE.*

## Введение

Асимптотические методы, которые опираются на выявлении в математических моделях тех или иных малых параметров, являются одним из инструментов приближенного решения и анализа сложных нелинейных задач. Численные процедуры являются зачастую единственно возможными при первых попытках приближенного решения и анализа задач естествознания. Взаимодействие двух подходов расширяет возможности каждого из них и при этом можно отметить два перспективных направления исследований.

Первое связано с возможностью на базе сходящегося итерационного процесса приближенно воспроизвести первые члены асимптотического разложения по степеням некоторого выбранного параметра, который предполагается малым. Это позволяет пользоваться такой асимптотикой, которую в дальнейшем будем называть численной, например, при процедурах экстраполяции и интерполяции.

Второе направление относится к алгоритмам, связанным с искусственно вводимым малом параметром при численном решении некоторых задач. Например, задач управления и оптимизации с ограничениями с помощью метода штрафных функций и некорректно поставленных задач с их последующей регуляризацией. То есть, если в моделях вводятся искусственные малые параметры, то построенная приближенная асимптотика может использоваться для повышения точности численного решения, например, с помощью метода Ричардсона.

В данной работе на примере построения регулятора в подходе SDRE в слабо нелинейной сингулярно возмущенной задаче управления строится численная асимптотика (ЧА) блоков матрицы решения сингулярно возмущенной начальной задачи для матричного уравнения типа Риккати. ЧА находится с помощью сходящегося итерационного процесса [1,2] и специальных приемов декомпозиции на основе метода пограничных функций А.Б. Васильевой [3]. Подробности подхода изложены в [4]. Затем полученная ЧА используется для построения интерполяционных и экстраполяционных конструкций, которые применяются в двух численных экспериментах.

## 1. Постановка задачи и итерационный алгоритм

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = A_1(x,\varepsilon)x + A_2(x,\varepsilon)y + B_1(x,\varepsilon)u, \quad x(0) = x^0, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^{n_x},\\
&\varepsilon\frac{dy}{dt} = A_3(x,\varepsilon)x + A_4(x,\varepsilon)y + B_2(x,\varepsilon)u, \ \ y(0) = y^0, \quad y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_y},\\
&J\left(u\right) = \frac{1}{2}w^T(t_f)Fw(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left(w^T Q(x,\varepsilon)w + u^T Ru\right)dt \to \min_u,\\
&u \in \mathbb{R}^r,\ w = \begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}^T \in W \subset \mathbb{R}^n,\ W = X \times Y,\ t \in \left[0, t_f\right],\ 0 < \varepsilon \ll 1,\ F \ge 0,\ Q(x,\varepsilon) \ge 0,\ R > 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00202, https://rscf.ru/project/21-11-00202/*

где $x$, $y$ – соответственно медленные и быстрые координаты; $X$, $Y$ – ограниченные множества; $w$ – совокупный вектор переменных состояния; $u$ – управление; ε – положительный малый параметр; $F$ – постоянная положительно полуопределенная матрица; $Q$ – положительно полуопределенная матрица при любых значениях своих аргументов; $R$ – постоянная положительно определенная матрица.

Необходимо построить численную асимптотику решения задачи на основе сходящегося итерационного процесса, а также построить и исследовать интерполяционные и экстраполяционные процедуры на её основе.

Воспользуемся итерационным алгоритмом [4] решения задачи (1). Будем искать решение задачи (1) в виде [5]

$$u(w,t,\varepsilon) = -R^{-1}B^T(x,\varepsilon)(P(w,t,\varepsilon)w + \Pi(w,t,\varepsilon)), \tag{2}$$

где $\Pi(w,t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} w^T \dfrac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_1} w & w^T \dfrac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_2} w & \dots & w^T \dfrac{\partial P(w,t,\varepsilon)}{\partial w_n} w \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$, а матрица $P(w,t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является решением следующей задачей Коши для матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\frac{dP}{dt} + PA(x,\varepsilon) + A^T(x,\varepsilon)P - PB(x,\varepsilon)R^{-1}B^T(x,\varepsilon)P + Q(x,\varepsilon) + \Omega(w,t,\varepsilon) = 0,\ P(w(t_f),t_f,\varepsilon) = F, \tag{3}$$

в котором $A(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1(x,\varepsilon) & A_2(x,\varepsilon) \\ \dfrac{A_3(x,\varepsilon)}{\varepsilon} & \dfrac{A_4(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix}$, $B(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1(x,\varepsilon) \\ \dfrac{B_2(x,\varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix}$, $Q(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} Q_1(x,\varepsilon) & Q_2(x,\varepsilon) \\ Q_2^T(x,\varepsilon) & Q_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} F_1 & \varepsilon F_2 \\ \varepsilon F_2^T & \varepsilon F_3 \end{pmatrix}$, $\Omega(w,t,\varepsilon) = \frac{1}{4}\hat{P}_w^T B(x,\varepsilon)R^{-1}B^T(x,\varepsilon)\hat{P}_w = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_2^T & \Omega_3 \end{bmatrix}$,

$\hat{P}_w(w,t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial w_1} w & \dfrac{\partial P}{\partial w_2} w & \dots & \dfrac{\partial P}{\partial w_n} w \end{bmatrix}^T$, $Q_i(x,\varepsilon) = Q_{i,0} + \varepsilon Q_{i,1}(x),\ i = \overline{1,3}$, а $\dfrac{dP}{dt}$ – полная производная по $t$ от $P(w,t,\varepsilon)$.

Матрица $P$ ищется в блочной форме вида $P(w,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(w,t,\varepsilon) & \varepsilon P_2(w,t,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2^T(w,t,\varepsilon) & \varepsilon P_3(w,t,\varepsilon) \end{pmatrix}$. Для определения ее блоков используется следующий итерационный процесс (условия его сходимости приведены в [4]):

$$\begin{aligned}
&P_1^{[i]} = \bar{P}_1 + \tilde{P}_1^{[i-1]}(x^{[i-1]}),\\
&\begin{pmatrix} P_2^{[i]} \\ P_3^{[i]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{P}_2^{[i-1]}(x^{[i-1]}) \\ \tilde{P}_3^{[i-1]}(x^{[i-1]}) \end{pmatrix} - L\cdot \tilde{P}_1^{[i-1]}(x^{[i-1]}),\\
&(x^{[i]}, y^{[i]}) = s(P_1^{[i]}, P_2^{[i]}, P_3^{[i]}),\\
&\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \tilde{P}_2^{[i]} \\ \tilde{P}_3^{[i]} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \tilde{N}_2(\tilde{P}_1^{[i-1]}(x^{[i-1]}), \tilde{P}_2^{[i]}(x^{[i]}), \tilde{P}_3^{[i]}(x^{[i]}), \varepsilon) \\ \tilde{N}_3(\tilde{P}_2^{[i]}(x^{[i]}), \tilde{P}_3^{[i]}(x^{[i]}), \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{P}_2^{[i]}(0) \\ \tilde{P}_3^{[i]}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\\
&\frac{d}{dt}\tilde{P}_1^{[i]} = \tilde{N}_1(\tilde{P}_1^{[i]}(x^{[i]}), \tilde{P}_2^{[i]}(x^{[i]}), \tilde{P}_3^{[i]}(x^{[i]}), \varepsilon),\\
&\tilde{P}_1^{[i]}(t_f) = 0,\\
&\tau = t_f - t, \quad \tilde{P}_1^{[-1]} \equiv \tilde{P}_2^{[-1]} \equiv \tilde{P}_3^{[-1]} \equiv 0,\\
&\tilde{P}_2^{[0]} \equiv \tilde{P}_3^{[0]} \equiv 0, \quad i = 0,1,2...
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь все матричные величины, за исключением $L$, вытянуты в векторы; $\tilde{P}_1^{[i]}, \tilde{P}_2^{[i]}, \tilde{P}_3^{[i]}$ - невязки между соответствующими блоками точного решения (3) и блоками текущего решения $P^{[i]}{}_1, P_2^{[i]}, P_3^{[i]}$ на $i$-м шаге; $\bar{P}_1 = P_{1,0}$, $\bar{P}_2 = P_{2,0} + \Pi_{2,0}(\tau_1)$, $\bar{P}_3 = P_{3,0} + \Pi_{3,0}(\tau_1)$ - равномерные приближения решений нулевого порядка; $s$ – функция интегрирования системы в (1) вдоль управления (2), вычисленного для значений блоков $P_1^{[i]}, P_2^{[i]}, P_3^{[i]}$. Для $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$ имеем следующие выражения

$$\tilde{N}_1(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, t, \varepsilon) = N_1\left(\tilde{P}_1 + P_{1,0}, \tilde{P}_2 + \bar{P}_2 - L_1\tilde{P}_1, t, \varepsilon\right) - N_1\left(P_{1,0}, P_{2,0}, t, 0\right),$$

$$\tilde{N}_2(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, t, \varepsilon) =$$

$$N_2(\tilde{P}_1 + P_{1,0}, \tilde{P}_2 + \bar{P}_2 - L_1\tilde{P}_1, \tilde{P}_3 + \bar{P}_3 - L_2\tilde{P}_1, t, \varepsilon) - N_2(P_{1,0}, \bar{P}_2, \bar{P}_3, t, 0) + \dot{L}_1\tilde{P}_1 + \varepsilon L_1\tilde{N}_1(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, t, \varepsilon),$$

$$\tilde{N}_3(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, t, \varepsilon) = N_3(\tilde{P}_2 + \bar{P}_2 - L_1\tilde{P}_1, \tilde{P}_3 + \bar{P}_3 - L_2\tilde{P}_1, t, \varepsilon) - N_3(\bar{P}_2, \bar{P}_3, t, 0) + \dot{L}_2\tilde{P}_1 + \varepsilon L_2\tilde{N}_1(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, t, \varepsilon),$$

$$N_1(P_1, P_2, t, \varepsilon) = -P_1A_1 - A_1^TP_1 - P_2A_3 - A_3^TP_2^T + P_1S_1P_1 + P_1SP_2^T + P_2S^TP_1 + P_2S_2P_2^T - Q_1 - \Omega_1,$$

$$N_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon) = -P_1A_2 - P_2A_4 - \varepsilon A_1^TP_2 - A_3^TP_3 + \varepsilon P_1S_1P_2 + P_1SP_3 + \varepsilon P_2S^TP_2 + P_2S_2P_3 - Q_2 - \Omega_2,$$

$$N_3(P_2, P_3, t, \varepsilon) = -\varepsilon P_2^TA_2 - \varepsilon A_2^TP_2 - P_3A_4 - A_4^TP_3 + \varepsilon^2P_2^TS_1P_2 + \varepsilon P_2^TSP_3 + \varepsilon P_3S^TP_2 + P_3S_2P_3 - Q_3 - \Omega_3,$$

$$S_1 = B_1R^{-1}B_1^T, S_2 = B_2R^{-1}B_2^T, S = B_1R^{-1}B_2^T.$$

Матрица $L$ есть решение задачи $\varepsilon\dot{L} = F_y(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, t)L - F_x(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, t), \quad L(t_f) = 0,$ в которой

$$F_y(P_{1,0}, P_{2,0} + \Pi_{02}, P_{3,0} + \Pi_{03}, t) =$$

$$\begin{pmatrix} -\left(A_{4,0} - S_{2,0}\left(P_{3,0} + \Pi_{03}\right)\right)^T \otimes I_{n_x} & I_{n_y} \otimes \left(-A_{3,0}^T + P_{1,0}S_{12,0} + \left(P_{2,0} + \Pi_{02}\right)S_{2,0}\right) \\ 0 & -I_{n_y} \otimes \left(A_{4,0} - S_{2,0}\left(P_{3,0} + \Pi_{03}\right)\right)^T - \left(A_{4,0} - S_{2,0}\left(P_{3,0} + \Pi_{03}\right)\right)^T \otimes I_{n_y} \end{pmatrix},$$

$$F_x(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, t) = \begin{pmatrix} \left(\left(-A_{2,0} + S_{2,0}\left(P_{3,0} + \Pi_{03}\right)\right)^T \otimes I_{n_x}\right) \\ 0_{n_y^2 \times n_x^2} \end{pmatrix},$$

где $I$ и $0$ – единичная и нулевая матрицы соответствующих размерностей, $\otimes$ - произведение Кронекера. Решение вырожденной задачи находится из уравнений

$$\frac{d}{dt}P_{1,0} = -P_{1,0}A_{1,0} - A_{1,0}^TP_{1,0} - P_{2,0}A_{3,0} - A_{3,0}^TP_{2,0}^T + P_{1,0}S_{1,0}P_{1,0} + P_{1,0}S_{12,0}P_{2,0}^T + P_{2,0}S_{12,0}^TP_{1,0}$$

$$+P_{2,0}S_{2,0}P_{2,0}^T - Q_{1,0} - \frac{1}{4}\hat{P}_{w,2,1}S_{2,0}\hat{P}_{w,2,1}^T, \quad P_{1,0}(w(t_f), t, \varepsilon) = F_1,$$

$$0 = -P_{1,0}A_{2,0} - P_{2,0}A_{4,0} - A_{3,0}^TP_{3,0} + P_{1,0}S_{12,0}P_{3,0} + P_{2,0}S_{2,0}P_{3,0} - Q_{2,0},$$

$$0 = -P_{3,0}A_{4,0} - A_{4,0}^TP_{3,0} + P_{3,0}S_{2,0}P_{3,0} - Q_{3,0}.$$

Правые пограничные слои $\Pi_{2,0}$ и $\Pi_{3,0}$ блоков $P_2$, $P_3$ находятся из следующих задач

$$\frac{d}{d\tau_1}\Pi_{2,0} = -\Pi_{2,0}(\tau_1)A_{4,0} - A_{3,0}^T\Pi_{3,0}(\tau_1) + P_{1,0}(t_f)S_{12,0}\Pi_{3,0}(\tau_1) + P_{2,0}(t_f)S_{2,0}\Pi_{3,0}(\tau_1) + \Pi_{2,0}(\tau_1)S_{2,0}P_{3,0}$$

$$+\Pi_{2,0}(\tau_1)S_{2,0}\Pi_{3,0}(\tau_1), \quad \Pi_{2,0}(0) = F_2 - P_{2,0}(t_f),$$

$$\frac{d}{d\tau_1}\Pi_{3,0} = -\Pi_{3,0}(\tau_1)A_{4,0} - A_{4,0}^T\Pi_{3,0}(\tau_1) + P_{3,0}S_{2,0}\Pi_{3,0}(\tau_1) + \Pi_{3,0}(\tau_1)S_{2,0}P_{3,0} + \Pi_{3,0}(\tau_1)S_{2,0}\Pi_{3,0}(\tau_1),$$

$$\Pi_{3,0}(0) = F_3 - P_{3,0}(t_f), \quad \tau_1 = \frac{t - t_f}{\varepsilon}.$$

При дополнительных условиях (см. [1,2]) для каждой фиксированной пары $x$,$y$ существует достаточно малая константа $\varepsilon_0$ , такая что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеют место оценки

$$\left\|P_j^* - P_j^{[i]}\right\| \le c\varepsilon^{i+1}, \quad i = 0,1,..., \ j = 1,2,3,$$

где $P_j^*$ - точное значение блока $P_j$ в исходной задаче, $P_j^{[i]}$ - значение блока $P_j$ , полученное на $i$-й итерации приведенного выше алгоритма, постоянная $c$ > 0 не зависит от номера итерации $i$ и ε.

## 2. Численная асимптотика

Так как задача (3) сингулярно возмущенная и на правом конце решение имеет пограничный слой, то равномерное асимптотическое приближение по методу пограничных функций [3] имеет два ряда: регулярный и пограничный. Здесь рассмотрим аппроксимацию регулярного разложения, которое аппроксимирует решение на отрезке $[0,\bar{t}]$, где $\bar{t} < t_f$.

Предположим, имеется сходящаяся последовательность $P_j^{[i]}(t,\varepsilon),\ \ i = 0,1,\dots,m,\ \ j = 1,2,3,$ - результат применения итерационного процесса, полученный при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0],\ \ t \in [0,\bar{t}]$. Представим ее формально в виде асимптотического ряда

$$\hat{P}_j(t,\varepsilon) = \hat{P}_{j,0}(t) + \varepsilon\hat{P}_{j,1}(t) + \dots + \varepsilon^m\hat{P}_{j,m}(t) + \dots, \tag{5}$$

где предполагаем, что $k$-й коэффициент этого ряда можно определить по формуле

$$\hat{P}_{j,k}(t) = \frac{P_j^{[k]}(t,\varepsilon) - \sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon^j\hat{P}_{j,i}(t)}{\varepsilon^k},\quad \hat{P}_{j,-1}(t) \equiv 0,\ k = 0,1,\dots,m,\quad j = 1,2,3, \tag{6}$$

В силу предположения о сходимости итерационного процесса, будем считать, что коэффициенты предложенного ряда (5), определяющиеся по (6), не зависят от величины $\varepsilon$. Определив их один раз, можно вычислять асимптотическое приближение к решению для меньшего или большого значения $\varepsilon$ в зоне действия асимптотики, получая таким образом интерполяционный (в первом случае) или эстраполяционный (во втором) алгоритм.

## 3. Процедуры экстраполяции и интерполяции

Сначала воспользуемся схемой экстраполяции Ричардсона. Пусть известны $l$ + 1 асимптотических приближений порядка $m$, каждая из которых вычислена для своего значения малого параметра из набора $\varepsilon, a_1\varepsilon, a_2\varepsilon, \dots, a_l\varepsilon$:

$$P_j(t,\varepsilon,\boldsymbol{a}) = \sum_{s=0}^{m}(a_i\varepsilon)^s P_{j,s}(t),\quad \boldsymbol{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_l\},\ \ a_0 = 1,\ \ a_i < 1,\ a_i\varepsilon < \varepsilon_0,\ i = 0,1,\dots,l,\ \ j = 1,2,3,\ m \ge l,$$

Допустим, имеет место следующая оценка [6]

$$\left\| P_j^*(t,b\varepsilon) - P_{j,appr}(t,\varepsilon,\alpha,\boldsymbol{a}) \right\| = O(\varepsilon^{l+1}),\qquad j = 1,2,3,$$

где $P_j^*(t,b\varepsilon)$ - точное решение для блока $P_j$ в исходной задаче при некотором значении параметра $b,\ b > 1,\ \varepsilon b < \varepsilon_0,\ P_{j,appr}$ - экстраполяция для блока $P_j$, вычисленная как $P_{j,appr}(t,\varepsilon,\alpha,\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{l}\alpha_i P_j(t,a_i\varepsilon),$ $\alpha \in \mathbb{R}^{l+1}$ - вектор коэффициентов, подлежащих определению, т.е. $\alpha$ есть функция $\boldsymbol{a},b$. Можно показать, что задача построения экстраполяции в пределах $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ сводится к решению линейного матричного уравнения $A_{extr}\alpha = b_{extr}$, где $A_{extr} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & \dots & a_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1^l & \dots & a_l^l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+1)\times(l+1)}, b_{extr} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ \vdots \\ b^l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l+1}, b > 1.$ При $a_i \ne a_j \ne 1,\quad i \ne j,\quad i,j \in \overline{1,l}$ имеем, что $\det(A_{extr}) \ne 0$. Действительно, это достигается лишь при условии $a_i \ne a_j \ne 1,\quad i \ne j,\quad i,j \in \overline{1,l}$. так как $\det(A_{extr}) = \prod_{i=1}^{l}(a_i - 1)\prod_{i=1}^{l-1}\prod_{j=i+1}^{l}(a_i - a_j)$.

Предполагая, что $\det(A_{extr}) \ne 0$, имеем

$$\alpha(\boldsymbol{a},b) = A_{extr}^{-1}b_{extr}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем строить экстраполяции Ричардсона на основе численных асимптотик (5),(6)

$$\hat{P}_{j,appr}(t,\varepsilon,\boldsymbol{a},b)=\sum_{i=0}^{l}\alpha_i(\boldsymbol{a},b)\hat{P}_j(t,a_i\varepsilon),\quad j=1,2,3, \tag{8}$$

где $\alpha$, как и прежде, определяется с помощью (7). Отметим, что для $\varepsilon b<\varepsilon_0$ при $b<1$ данная процедура носит интерполяционный, а при $b>1$ экстраполяционный характер.

### 4. Численные эксперименты

С помощью двух примеров исследуем интерполяционные и экстраполяционные свойства конструкций (8). Первый пример из [7] связан с управлением электромагнитным двигателем

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt}=18654y,\ \ x(0)=-3,\\ \varepsilon\frac{dy}{dt}=\text{-}1.81x\text{-}580.88y+73.52u,\ \ y(0)=5,\\ J\left(u\right)=\frac{0.01x^2(0.01)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{0.01}\left(x^2+4600y^2+30u^2\right)dt\to\min_u,\quad x,y\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь матрицы системы и критерия не зависят от состояния системы, поэтому приведенные выше соотношения для итерационного процесса заметно упрощаются. Для различных значений параметра $\varepsilon$ было выполнено 5 итераций сходящегося процесса, описанного в разделе 2. С помощью результатов итераций построены первые пять членов асимптотики (5),(6).

Введем набор значений параметра $\varepsilon$ в задаче (9) $\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}0.01 & 0.1 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$. Построим аппроксимацию решения (9) для каждого возможного значения $b\boldsymbol{\varepsilon}_q$, $q=1,2,...,5$ на основе численных асимптотик, построенных при других четырех оставшихся значений ε. На Рис. 1 и Рис. 2. представлены графики ошибок аппроксимации $P_j^*(t,b\boldsymbol{\varepsilon}_q)-\hat{P}_{j,appr}(t,\boldsymbol{\varepsilon}_q,\boldsymbol{a},b),$ $j=1,2$, где $P_j^*(t,b\varepsilon)$ и $\hat{P}_{j,appr}(t,\boldsymbol{\varepsilon}_q,\boldsymbol{a},b)$ - соответственно точное и приближенное решение для блока $P_j$ в исходной задаче. Каждое приближение строилось на основе результатов лишь одного сходящегося процесса, полученного при $\boldsymbol{\varepsilon}_q$. Далее использовались выражения (6) и (8), где $l$ = 1,2,3,4, $m=l$, $a_i=\frac{1}{2}\left(1+\frac{(i\text{ - }1)}{l}\right),i=1,2,...,l.$ Множители $b$ могли быть как больше, так и меньше 1, и определялись как $b=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i}{\boldsymbol{\varepsilon}_j},\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,...,5$. В первом случае получается экстраполяционная, а во втором - интерполяционная процедура. Графики ошибок для блока $P_3$ аналогичны графикам для $P_2$.

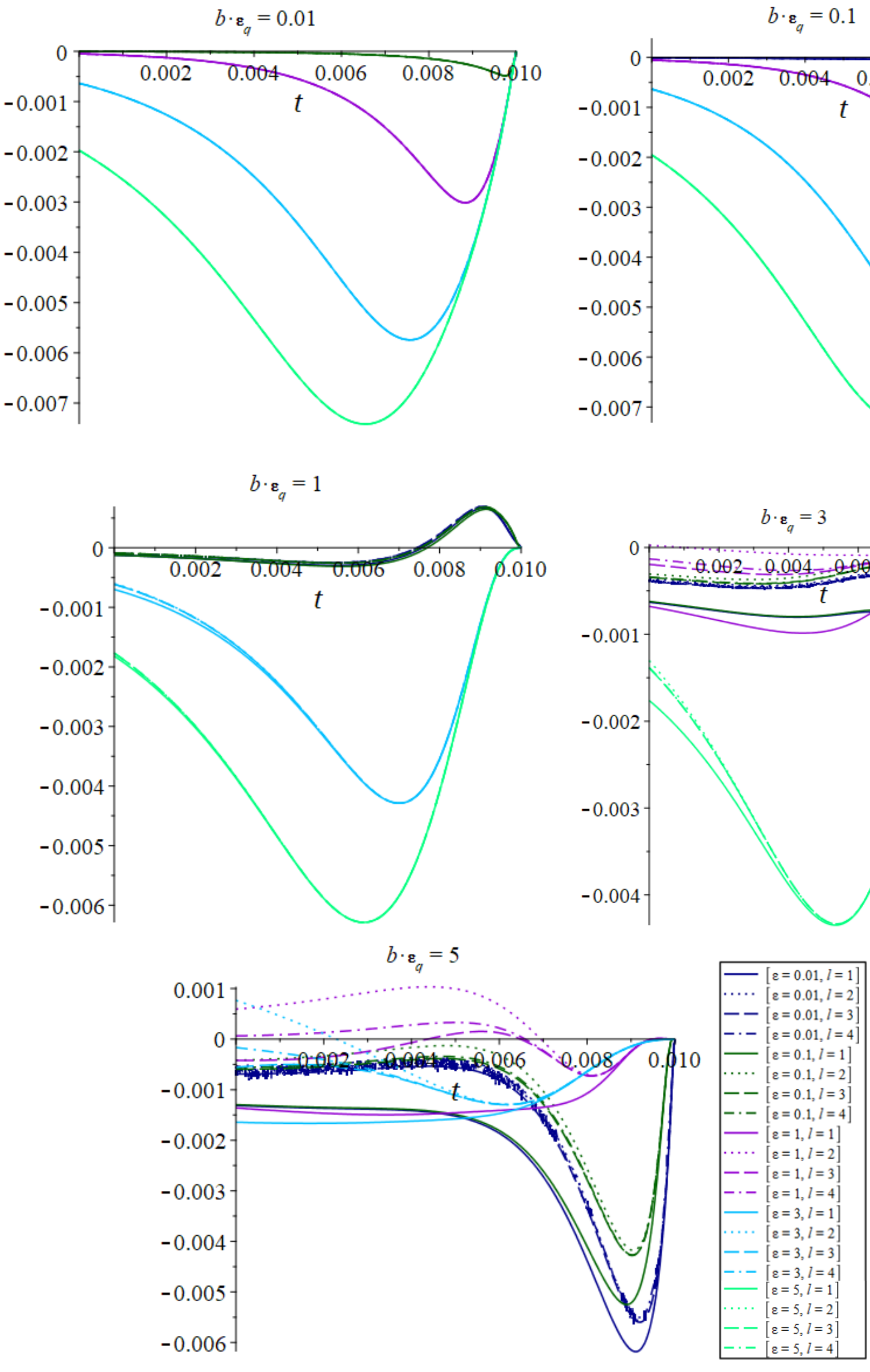


*Рис. 1. Ошибки аппроксимаций для $P_1$ в задаче (9)*

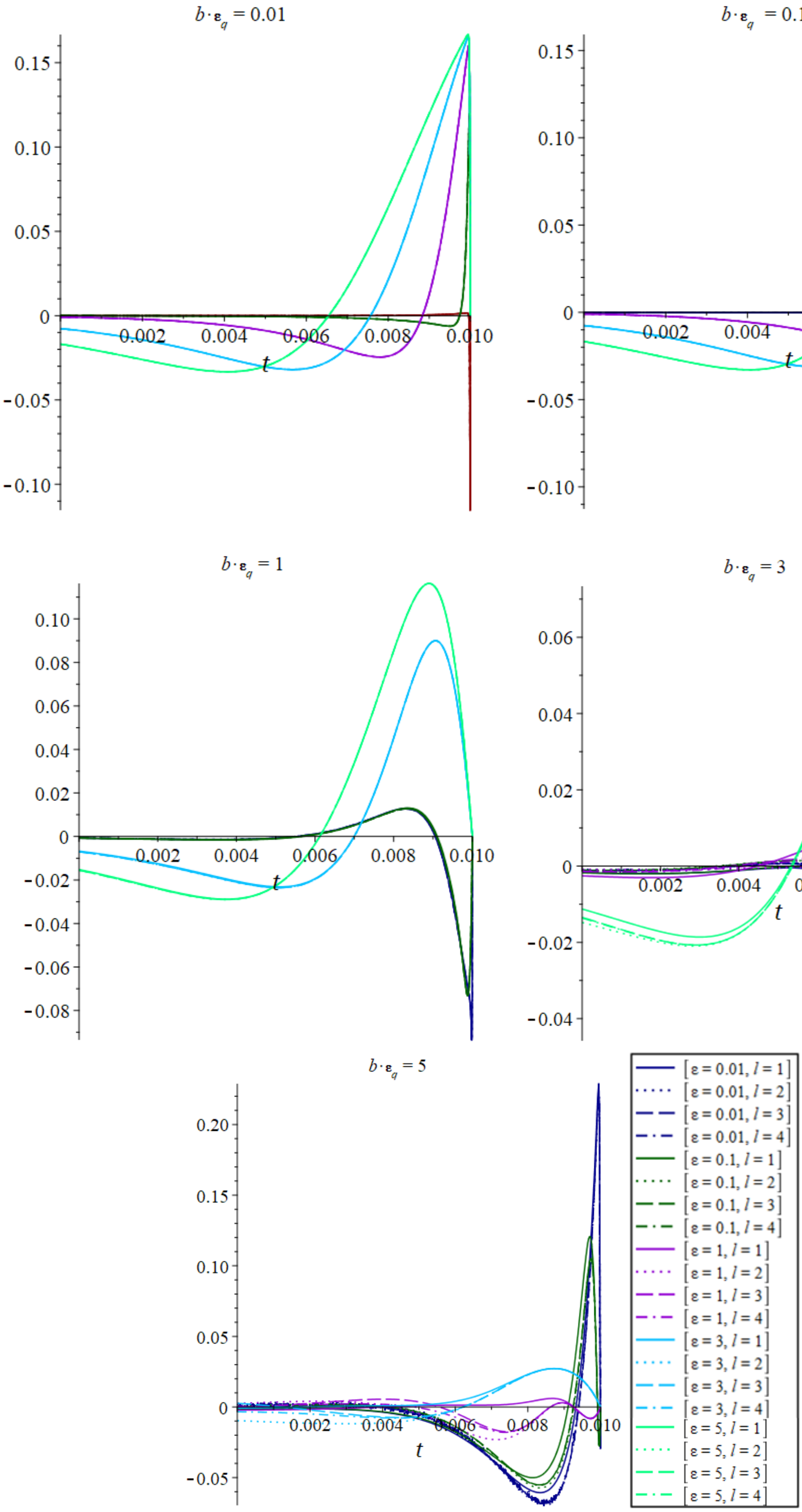


*Рис. 2. Ошибки аппроксимаций для $P_2$ в задаче (9)*

Графики ошибок показывают, что при всех рассмотренных значениях ε ошибки находятся в зоне действия асимптотических приближений. Как видно, во всех рассмотренных случаях ошибки интерполяции и экстраполяции конструкции (8) достаточно малы. Они незначительно отличаются для разных значений $l$ при $b\boldsymbol{\varepsilon}_q \leqslant 1$.

На графиках Рис. 2 также видно, что во многих рассмотренных экспериментах наблюдается действие пограничного слоя. Но на основном интервале $[0,\bar{t}]$, $\bar{t} < t_f$, где и рассматривается численная асимптотика, ошибки экстраполяции достаточно малы.

Рассмотрим второй пример со слабой нелинейностью

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = y,\ \ x(0) = -3, \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} = \left(1+\varepsilon\sin(x)\right)x + \left(-1+\varepsilon\cos(x)\right)y + \left(2+3\varepsilon e^{-0.1x^2}\right)u,\ \ y(0)=2, \qquad (10) \\ J(u) = \frac{x^2(5)+y^2(5)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^5 \left(x^2+y^2+u^2\right)dt \to \min_u,\quad x,y\in\mathbb{R}. \end{gathered}$$

Для этой задачи выполнено 4 итерации сходящегося процесса. На Рис. 3 и Рис. 4 представлены графики точных решений $P_j^*(t,b\boldsymbol{\varepsilon}_q)$, $j=1,2$, полученных с помощью метода из [8], а также приближения по схеме Ричардсона (8) $\hat{P}_{j,appr}(t,\boldsymbol{\varepsilon}_q,\boldsymbol{a},b)$, где $q=1,2,3$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [0.01\quad 0.05\quad 0.1]$, $l=1,2,3$, $m=l$, $a_i = \frac{1}{2}\left(1+\frac{(i-1)}{l}\right), i=1,2,\ldots,l$, $b=\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$, $i\neq j$, $i,j=1,2,3$. Графики приближенных решений для блока $P_3$ аналогичны графикам для $P_2$.

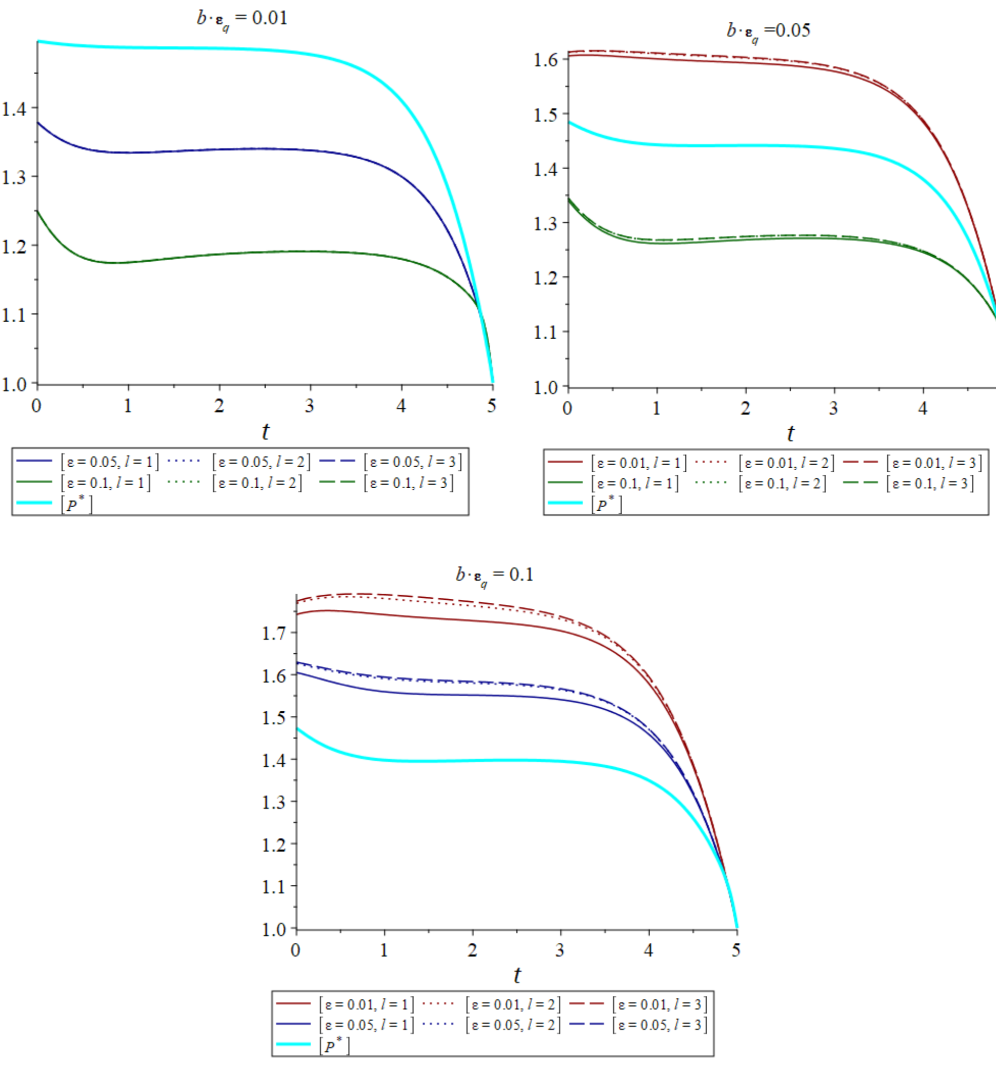


*Рис. 3. Ошибки аппроксимаций для $P_1$ в задаче (10)*

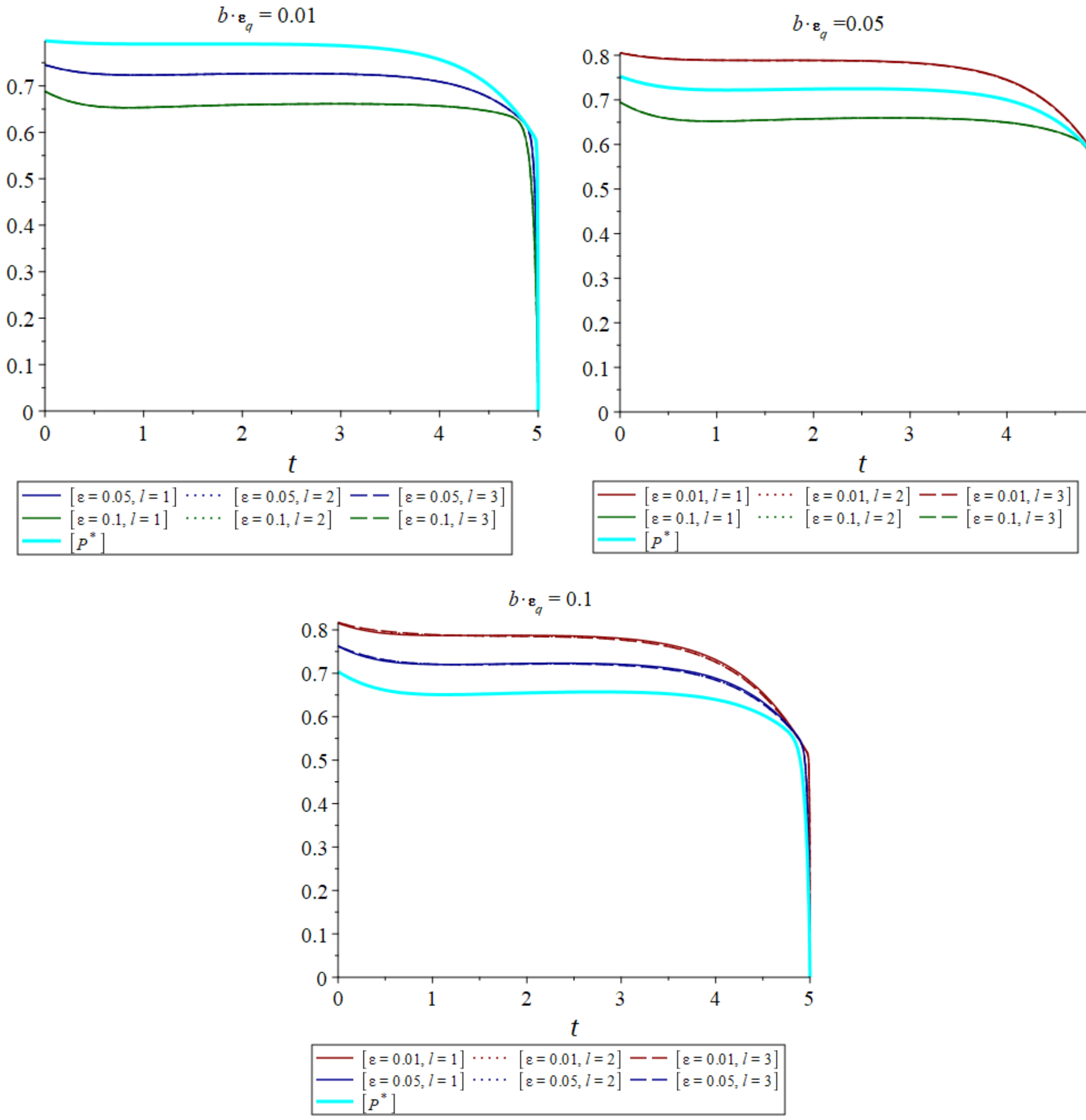


*Рис. 4. Ошибки аппроксимаций $P_2$ в системы (10)*

Как видно, во втором примере точность аппроксимации меньше, по сравнению с первым. Это объясняется зависимостью коэффициентов матриц в уравнении Риккати от координат вектора состояния, которые находятся приближенно.

## 5. Заключение

На основе анализа результатов сходящегося итерационного процесса и использования асимптотических приближений предложен подход для построения семейства приближенных параметрических решений начальных задач для соответствующих матричных дифференциальных уравнений типа Риккати, возникающих при построении регуляторов в сингулярно возмущенной слабо нелинейной задаче управления. Подход позволяет получать аппроксимации законов обратной связи в рассматриваемой задаче для параметров близких по значениям к параметру, использованному в сходящемся итерационном процессе.

Дмитриев М.Г. выражает благодарность VIASM (г. Ханой, Вьетнам) за создание благотворной исследовательской среды во время визита в 2023 г.

## Литература

1. *Dmitriev M.G., Klishevich A.M.* Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions // Systems & Control Letters. – 1984. – Vol. 4(4). – P. 223-226.

2. *Клишевич А.М.* Равномерные приближения в сингулярно возмущенных задачах и их применение в теории оптимального управления. Диссертация на соиск. учен. ст. к.ф.-м.н. по спец. 01.01.02. ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске. – 1985. – 148 с.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений – М.: Наука, 1973. – 273 с.
4. *Dmitriev M., Makarov D.* An Iterative Method for Regulator Construction in a Weakly Nonlinear Singularly Perturbed Control Problem // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – IEEE, 2022. – P. 1-4.
5. *Heydari A., Balakrishnan S.N.* Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2015. – Vol. 25, N 15. – P. 2687-2704.
6. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В*. Повышение точности решений разностных схем. – М.: Наука, 1979 г. – 319 с.
7. *Kokotovic P., Yackel R.* Singular perturbation of linear regulators: basic theorems // IEEE transactions on automatic control. – 1972. – Vol. 17. – P. 29-37.
8. *Çimen T., Banks S. P*. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria // Systems & control letters. – 2004. – Vol. 53. N 5. – P. 327-346.