DOI: 10.25728/mlsd.2023.0547

ОБ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ D-SDRE РЕГУЛЯТОРА В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ[1]

Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

Аннотация. На примере класса нелинейных задач управления с параметром приводится алгоритм построения семейства законов обратной связи для некоторого интервала изменения параметра. При этом используются асимптотические приближения по параметру вблизи концов интервала и вблизи внутренних точек интервала при разбиении исходного интервала на подинтервалы. Конструкция семейства порождается различными Паде аппроксимациями. Численные эксперименты иллюстрирует эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, асимптотические приближения, малый параметр, подход D-SDRE.

Введение

При приближенном решении задач оптимального управления с параметрами можно использовать как методы приближения функций, так и методы асимптотического анализа. Последние, для задач с малым параметром для регулярно и сингулярно возмущенных систем, активно развиваются в литературе, начиная со второй половины *20* века (см. обзоры [1-5]), где, как правило, рассматривались асимптотические приближения различных порядков в окрестности нулевого значения малого параметра. Асимптотическое приближение по параметру можно рассматривать как символьное параметрическое приближенное описание множества соответствующих точных решений в зоне действия асимптотических приближений. При этом асимптотическое приближение также обладает свойствами интерполяции и экстраполяции (последнее при применении метода Ричардсона).

В настоящее время для управления нелинейными системам большое значение играют техники подхода на основе решения матричного уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния, как для непрерывных систем, SDRE [6], так и для дискретных, D-SDRE [7]. В этих подходах, как и в схеме Калмана для линейных систем управления с квадратичным функционалом, матрицы коэффициентов усиления формируются на основе решений соответствующих матричных уравнений Риккати, но при этом в нелинейных задачах все матрицы могут зависеть от координат вектора состояния. И поэтому при наличии малых возмущений естественно использовать асимптотические приближения к решениям таких нелинейных уравнений и соответствующие конструкции, в частности аппроксимации Паде (ПА) (см. [8]).

Ранее нами были получены результаты по построению ПА решений матричных уравнений Риккати для различных классов непрерывных и дискретных нелинейных задач на одном интервале изменений параметра. Так в [9] рассматривается построение одноточечной ПА с пограничным слоем для слабо нелинейной дискретной системы, где асимптотика и соответствующая ПА для регулятора строятся по малому шагу. В [10] для двух классов непрерывных систем – слабо нелинейных и с большим коэффициентом усиления, – строятся двухточечные ПА с применением сплайнов. В [11] рассматриваются непрерывные системы с большим коэффициентом усиления на бесконечном и конечном интервалах, где в итоге строится двухточечная ПА и дополнительно иллюстрируется использование схемы экстраполяции Ричардсона. В [12] рассматриваются непрерывные системы на полуоси с большим коэффициентом усиления и с помощью двухточечной ПА строятся регуляторы, обеспечивающие стабилизацию замкнутых систем на некотором интервале изменения параметра. В [13] строится одноточечная аппроксимация Паде с использованием экстраполяции Ричардсона для дискретных слабо нелинейных систем.

В настоящей работе строится несколько асимптотических разложений по параметру, присутствующему при матрице собственных движений системы, для решения дискретного матричного уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (D-SDRE): в окрестности концов интервала изменения параметра, а также в окрестности произвольной точки внутри интервала. Эти разложения объединяются в одну конструкцию с помощью аппроксимаций Паде, что позволяет получить одну символьную двухинтервальную конструкцию для всего рассматриваемого интервала значений. Проводится сравнение нескольких вариантов ПА порядка [2/2]: двухточечных и трехточечных (с добавлением точки внутри интервала), а также сравнение с регуляторами на основе

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00202*

локальных асимптотических разложений. При этом для внутренней точки строится асимптотическое разложения в правой окрестности, а для крайних точек интервала – в правой и левой окрестностях, соответственно.

Многоточечные аппроксимации Паде используют информацию о нескольких асимптотических приближениях при построении регуляторов. И, конечно, увеличение количества информации о точном решении, полученном из асимптотических аппроксимаций в окрестности разных точек, может естественно привести к повышению точности приближений. Это как раз и демонстрируют численные эксперименты, проведенные в настоящей работе.

1. Постановака задачи

Рассматривается следующая нелинейная управляемая дискретная система с параметром, который для простоты последующих вычислений присутствует в качестве множителя при матрице собственных движений

$$\begin{aligned} &x(t+1) = \varepsilon A(x)x(t) + B(x)u(t), \\ &x(0) = x_0,\ x(t) \in X \subset R^n,\ u(t) \in R^r,\ t = 0,1,2...,\ \alpha \le \varepsilon \le \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где ε – положительное число, $A(x) \in R^{n\times n}$, $B(x) \in R^{n\times r}$, $X \subset R^n$ – заданное замкнутое ограниченное подмножество пространства состояний, причем траектории замкнутой системы существуют и единственны в X для всех допустимых $t = 0,1,2...$ Предполагается, что $\varepsilon A(x), B(x)$ управляемая пара $\forall x \in X$, $\alpha \le \varepsilon \le \beta$.

Будем строить семейство регуляторов $u(x,\varepsilon)$, которые претендуют на стабилизацию замкнутых систем для всех значений параметра ε в системе (1), с помощью решения вспомогательной задачи оптимального управления с критерием качества

$$I(u) = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T R_0 u) \to \min, \tag{2}$$

где $Q(x,\varepsilon) \in R^{n\times n}$, $R_0 \in R^{r\times r} > 0, Q(x,\varepsilon) > 0$. Здесь матрицы квадратичных форм в (2) выбираются специальным образом, чтобы предлагаемый регулятор существовал и матрицы $\varepsilon A(x)$, $Q^{1/2}(x,\varepsilon)$ образовывали наблюдаемую пару $\forall x \in X, \alpha \le \varepsilon \le \beta$.

2. Алгоритм управления

Предлагаемый алгоритм построения нелинейного стабилизирующего регулятора для (1),(2) основан на приближенном решении следующего матричного дискретного алгебраического уравнения Риккати

$$\varepsilon^2 A^T(x)PA(x) - P - \varepsilon^2 A^T(x)PB(x)\tilde{R}^{-1}(x)B^T(x)PA(x) + Q(x,\varepsilon) = 0, \tag{3}$$

где $\tilde{R}(x) = (R_0 + B^T(x)PB(x))$ обратима $\forall x \in X, \alpha \le \varepsilon \le \beta$.

По схеме D-SDRE [7] управление в (1),(2) ищется в виде нелинейной обратной связи по состоянию для любого $x \in X$

$$u(x,\varepsilon) = -\varepsilon\left[R_0 + B(x(t))^T P(x(t))B(x(t))\right]^{-1} B(x(t))^T P(x(t))A(x(t))x(t), \tag{4}$$

где $P(x(t))$ ищется приближенно путем построения асимптотических приближений в окрестности границ интервала, а также в окрестности некоторой дополнительной точки внутри интервала. После этого эти три приближения объединяются в одну конструкцию с использованием аппроксимации Паде.

Для этого интервал изменения значения параметра $\alpha \le \varepsilon \le \beta$ разбивается на два отдельных подинтервала, $\alpha \le \varepsilon \le \gamma$, $\gamma \le \varepsilon \le \beta$ и затем строится три локальных асимптотических разложения в окрестности границ этих интервалов. Так в окрестности точки α строится асимптотическое разложение по вводимому малому параметру $\eta = \varepsilon - \alpha$, которое приближает решение $P(x,\varepsilon)$ для ε в правой окрестности точки α. А в окрестности точки β вводится положительный малый параметр $\mu = \beta - \varepsilon$, $\mu \to 0$ для построения разложения матрицы $P(x,\varepsilon) = P(x,\beta - \mu)$ в левой окрестности значения β. Аналогично строится асимптотическое приближение в правой окрестности точки γ, разделяющей первый и второй подинтервалы значений параметра ε, путем введения соответствующего малого параметра $\nu = \varepsilon - \gamma,\ \nu \to 0$.

При этом матрицы $P(x,\varepsilon),\ Q(x,\varepsilon)$ представляются в виде рядов по степеням вводимых параметров, а именно, $P_2^R(x,\eta) = P_0^R(x) + \eta P_1^R(x) + \eta^2 P_2^R(x)$, $Q(x,\eta) = Q_0(x) + (\alpha+\eta)Q_1(x) + (\alpha+\eta)^2 Q_2(x)$, $P_2^L(x,\mu) = P_0^L(x) + \mu P_1^L(x) + \mu^2 P_2^L(x)$, $Q(x,\mu) = Q_0(x) + (\beta-\mu)Q_1(x) + (\beta-\mu)^2 Q_2(x)$, $\tilde{P}_2^R(x,\nu) = \tilde{P}_0^R(x) + \nu \tilde{P}_1^R(x) + \nu^2 \tilde{P}_2^R(x)$, $Q(x,\nu) = Q_0(x) + (\gamma+\nu)Q_1(x) + (\gamma+\nu)^2 Q_2(x)$.

Выпишем уравнения для членов указанных асимптотических приближений. Для членов нулевого порядка получаем уравнения Риккати, а для членов первого и второго приближений – линейные уравнения Ляпунова. Например, для членов приближения $P_2^R(x,\eta)$ уравнения имеют вид

1. Уравнение D-SDRE для $P_0^R(x)$

$$\alpha^2 A^T(x)P_0^R(x)A(x) - P_0^R(x) - \alpha^2 A^T(x)P_0^R(x)B(x)\tilde{R}^{-1}(x)B^T(x)P_0^R(x)A(x) + Q(x,0) = 0,$$

$$Q(x,0) = Q_0(x) + \alpha Q_1(x) + \alpha^2 Q_2(x),\ \tilde{R}(x) = (R_0 + B^T(x)P_0^R(x)B(x)).$$

2. Уравнение Ляпунова для P_1^R

$$(A_{cl}^R)^T P_1^R A_{cl}^R - P_1^R + C_1^R = 0,$$

$$C_1^R = Q_1(x) + 2\alpha Q_2(x) + 3\alpha^2 Q_3(x) + 2\alpha A^T(x)P_0^R A(x) - 2\alpha A^T(x)P_0^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_0^R A(x);$$

$$A_{cl}^R = \alpha(A(x) - B(x)(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_0^R A(x)).$$

3. Уравнение Ляпунова для P_2^R

$$(A_{cl}^R)^T P_2^R A_{cl}^R - P_2^R + C_2^R = 0,$$

$$C_2^R = Q_2(x) + 3\alpha Q_3(x) + A^T(x)P_0^R A(x) + 2\alpha A^T(x)P_1^R A(x) - A^T(x)P_0^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_0^R A(x)$$
$$-\alpha^2 A^T(x)P_1^R B(x)(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_1^R A(x) - 2\alpha A^T(x)P_1^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_0^R A(x)$$
$$-2\alpha A^T(x)P_0^R B(x)(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_1^R A(x) + \alpha^2 A^T(x)P_1^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_1^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_0^R A(x) + \alpha^2 A^T(x)P_0^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_1^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_1^R A(x) + 2\alpha A^T(x)P_0^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_1^R B(x)\times$$
$$\times(R_0 + B^T(x)P_0^R B(x))^{-1} B^T(x)P_0^R A(x).$$

Ранее в работах [9-14] мы строили двухточечные ПА для решений матричных алгебраических уравнений Риккати для непрерывных и дискретных систем управления на основе двух асимптотических разложений. Здесь предлагается двухинтервальная ПА, построенная на основе трех асимптотических приближений в окрестности разных точек интервала изменения параметра. Эти три приближения объединяются в одну символьную конструкцию с помощью двухинтервальной диагональной [8] аппроксимации Паде [2/2]

$$PA^{[2/2]}(x,\varepsilon) = \left(\mathrm{M}_0(x) + \varepsilon \mathrm{M}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{M}_2(x)\right) \times \left(E + \varepsilon \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{N}_2(x)\right)^{-1}, \tag{5}$$

где E - единичная матрица.

В случае построения ПА по двум асимптотическим разложениям, определенным в окрестностях границ исходного интервала значений параметра, система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_0 = P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R \\
&\mathrm{M}_1 = (P_0^L + \beta P_1^L + \beta^2 P_2^L)\mathrm{N}_1 + (-P_1^L - 2\beta P_2^L) \\
&\mathrm{M}_1 = (P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R)\mathrm{N}_1 + (P_1^R - 2\alpha P_2^R) \\
&\mathrm{M}_2 = (-P_1^L - 2\beta P_2^L)\mathrm{N}_1 + (P_0^L + \beta P_1^L + \beta^2 P_2^L)\mathrm{N}_2 + P_2^L \\
&\mathrm{M}_2 = (P_1^R - 2\alpha P_2^R)\mathrm{N}_1 + (P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R)\mathrm{N}_2 + P_2^R.
\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь при построении аппроксимации Паде по трем асимптотическим разложением, представление (5) приравнивается одновременно к трем асимптотическим разложениям

$$\left(\mathrm{M}_0(x) + \varepsilon \mathrm{M}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{M}_2(x)\right)\left(E + \varepsilon \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{N}_2(x)\right)^{-1} = P_0^R(x) + (\varepsilon - \alpha)P_1^R(x) + (\varepsilon - \alpha)^2 P_2^R(x),$$

$$\left(\mathrm{M}_0(x) + \varepsilon \mathrm{M}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{M}_2(x)\right)\left(E + \varepsilon \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{N}_2(x)\right)^{-1} = \tilde{P}_0^R(x) + (\varepsilon - \gamma)\tilde{P}_1^R(x) + (\varepsilon - \gamma)^2 \tilde{P}_2^R(x),$$

$$\left(\mathrm{M}_0(x) + \varepsilon \mathrm{M}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{M}_2(x)\right)\left(E + \varepsilon \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{N}_2(x)\right)^{-1} = P_0^L(x) + (\beta - \varepsilon)P_1^L(x) + (\beta - \varepsilon)^2 P_2^L(x),$$

и в результате получается система уравнений для определения неизвестных коэффициентов Паде [2/2]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_0 = P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R \\
&\mathrm{M}_1 = (P_0^L + \beta P_1^L + \beta^2 P_2^L)\mathrm{N}_1 + (-P_1^L - 2\beta P_2^L) \\
&\mathrm{M}_1 = (P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R)\mathrm{N}_1 + (P_1^R - 2\alpha P_2^R) \\
&\mathrm{M}_2 = (-P_1^L - 2\beta P_2^L)\mathrm{N}_1 + (P_0^L + \beta P_1^L + \beta^2 P_2^L)\mathrm{N}_2 + P_2^L \\
&\mathrm{M}_2 = (\tilde{P}_1^R - 2\gamma \tilde{P}_2^R)\mathrm{N}_1 + (\tilde{P}_0^R - \gamma \tilde{P}_1^R + \gamma^2 \tilde{P}_2^R)\mathrm{N}_2 + \tilde{P}_2^R.
\end{aligned} \tag{7}$$

То есть, система уравнений для поиска коэффициентов ПА формируется с использованием двух уравнений, связанных с членами асимптотических разложений в окрестности концов интервала $\alpha \le \varepsilon \le \beta$ и одним уравнением, связанным с асимптотическим разложением в правой окрестности средней точки интервала. Отличие системы (7) от предыдущей системы (6) заключается в замене последнего уравнения, использующего асимптотическое разложение в окрестности точки α, асимптотическим приближением в окрестности внутренней точки, что и отражает использование качественной информации о точном решении в середине интервала значений параметра.

Таким образом итоговая система для ПА представляется в виде

$$\begin{pmatrix}
E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & 0 & -(P_0^L + \beta P_1^L + \beta^2 P_2^L) & 0 \\
0 & E & 0 & -(P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R) & 0 \\
0 & 0 & E & -(-P_1^L - 2\beta P_2^L) & -(P_0^L + \beta P_1^L + \beta^2 P_2^L) \\
0 & 0 & E & -(\tilde{P}_1^R - 2\gamma \tilde{P}_2^R) & -(\tilde{P}_0^R - \gamma \tilde{P}_1^R + \gamma^2 \tilde{P}_2^R)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathrm{M}_0 \\ \mathrm{M}_1 \\ \mathrm{M}_2 \\ \mathrm{N}_1 \\ \mathrm{N}_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} P_0^R - \alpha P_1^R + \alpha^2 P_2^R \\ (-P_1^L - 2\beta P_2^L) \\ (P_1^R - 2\alpha P_2^R) \\ P_2^L \\ \tilde{P}_2^R \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В качестве коэффициента усиления регулятора вида (4) теперь будем использовать следующую симметричную конструкцию, полученную на основе соответствующей аппроксимации Паде

$$K^{[2/2]}(x,\varepsilon) = \frac{\left(PA^{[2/2]}(x,\varepsilon)\right)^T + PA^{[2/2]}(x,\varepsilon)}{2}.$$

В случае разрешимости уравнений для членов асимптотического разложения, а также существования решения системы (8), а также существования знаменателя $\left(E + \varepsilon \mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathrm{N}_2(x)\right)^{-1}$ в (5) и выполнения условия $K^{[2/2]}(x,\varepsilon) > 0$ соответствующее параметрическое семейство регуляторов для (1)-(2) $\forall x \in X$, $\varepsilon \in [\alpha_1, \alpha_2]$ имеет вид

$$u(x,\varepsilon) = -\varepsilon\left[R_0 + B(x(t))^T K^{[2/2]}(x,\varepsilon) B(x(t))\right]^{-1} B(x(t))^T K^{[2/2]}(x,\varepsilon) A(x(t))x(t). \tag{9}$$

Таким образом, здесь строится двухинтервальная ПА с разбиением исходного множества значений параметра на два подинтервала и использованием трех асимптотических приближений в окрестности границ интервала и его середины. Аналогичным образом могут быть построены *n*-интервальные ПА.

3. Численные эксперименты

Построение символьного семейства регуляторов на основе двухинтервальной аппроксимации Паде проводится на следующем примере

$$x(t+1) = \varepsilon A(x)x(t) + B(x)u(t)\,,$$

где $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.5 + x_1 \end{bmatrix}$, $B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, $Q_0 = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$, $R_0 = 1$, $Q_1(x) = Q_2(x) = \begin{bmatrix} 11 + 0.01x_1^{\,2} & 0 \\ 0 & 11 + 0.01x_2^{\,2} \end{bmatrix}$,

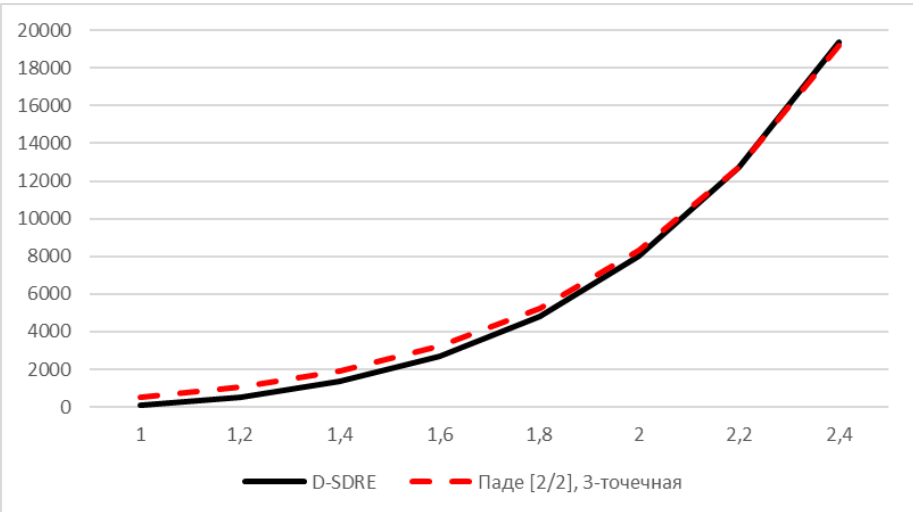
$x(0) = (0.5 \;\; 0.1)^T$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 2.5$, $N = 30$ – число дискретных шагов.

В Таблице 1 и на Рис. 1 проводится сравнение трех регуляторов по значению критерия качества (2): а) регулятора на основе управления D-SDRE (4); б) Паде регулятора [2/2] (9) на основе одноинтервальной ПА (6); в) предлагаемого Паде регулятора [2/2] на основе двухинтервальной ПА (7).

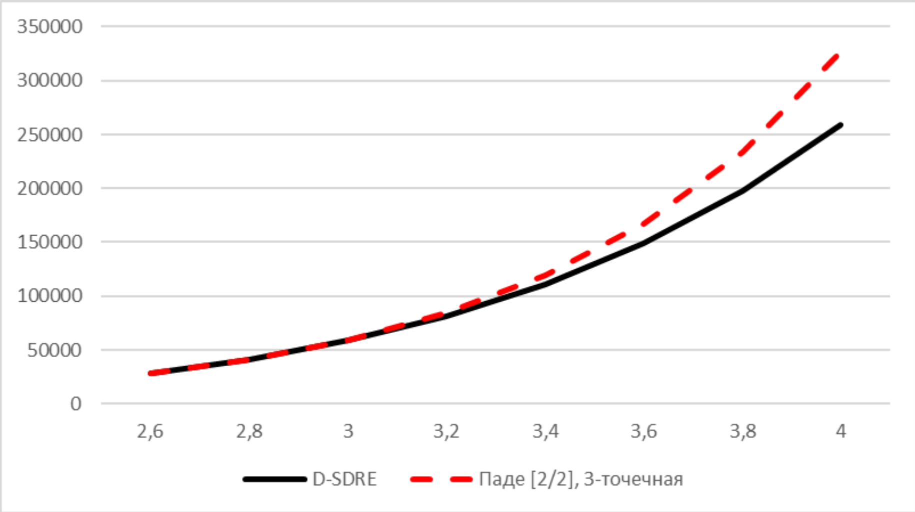
На Рис. 2 представлены траектории соответствующих замкнутых систем.

Таблица 1. Сравнение регуляторов по значению критерия при разных значениях параметра

ε	**D-SDRE**	***2*-интервальная *3*-точечная ПА [2/2]**	***1*-итервальная *2*-точечная ПА [2/2]**
1	94,29	525,69	147,44
1,2	517,15	1037,66	3,39E+9
1,4	1338,62	1881,02	1,51E+17
1,6	2694,73	3213,05	5,55E+24
1,8	4818,12	5251,71	7,03E+30
2	8020,94	8295,81	-
2,2	12708,20	12752,16	-
2,4	19394,54	19172,87	-
2,6	28722,81	28306,93	-
2,8	41484,25	41172,84	-
3	58640,27	59161,98	-
3,2	81345,72	84187,70	-
3,4	110973,80	118903,34	-
3,6	149142,50	167026,00	-
3,8	197742,50	233825,95	-
4	258967,00	326882,63	-



Первый подинтервал



Второй подинтервал

Рис. 1. Сравнение регуляторов по значению критерия при разных значениях параметра

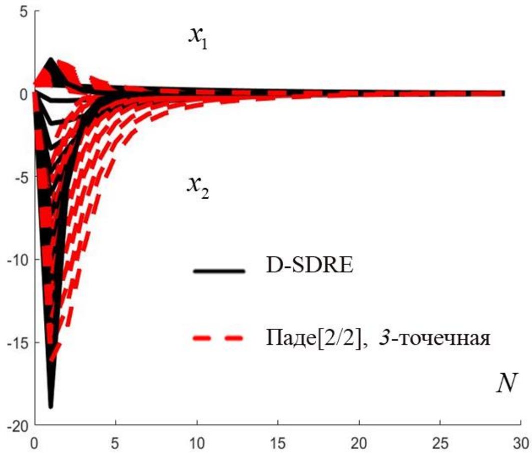


Рис. 2. Траектории замкнутых систем

4. Заключение

В работе продемонстрировано преимущество использования дополнительной информации о решении при построении аппроксимаций Паде, за счет рассмотрения большего числа асимптотических разложений в окрестности различных значений параметра в рамках заданного интервала. Предложен подход к построению параметрического семейства регуляторов для частного класса дискретных нелинейных систем на основе использования двухинтервальной матричной Паде аппроксимации.

Литература

1. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1977. N 3. – С. 101–166.
2. *Kokotovic, P. V., O'Malley, Robert E. jun., Sannuti, P.* Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview // Automatica. – 1976. N. 12. – С. 123-132.
3. *Васильева А.Б, Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1982. N. 20. – С. 3–77.
4. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг. // Автоматика и телемеханика. 2006. N 1. – С. 35-38.
5. *Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S.* Discrete singularly perturbed control problems (A survey) // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms. – 2017. – N 5. – P. 335–370.
6. *Çimen T.* Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) method // Annual Reviews in control. – 2010. – Vol. 34, N 1. – P. 32–51.

7. *Dutka A.S., Ordys A.W., Grimble M.J.* Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator // Proceedings of the American Control Conference. IEEE. – 2005. – P. 2293–2298.
8. *Baker G., Graves-Morris P. R.* Pade approximations. Addison-Wesley Publishing, 1981.
9. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Symbolic Regulator Sets for a Weakly Nonlinear Discrete Control System with a Small Step // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1-14.
10. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Pade approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. – 2021. – C. 45–62.
11. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Padé Approximations and the SDRE Technique in the Design of Parametric Families of Feedback Laws // 2022 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, 2022. – P. 587–594.
12. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Symbolic Padé representation of stabilizing regulators for a class of nonlinear control systems with a parameter // 14th International Symposium «Intelligent Systems», INTELS’20. – Moscow, 2022. – P. 1–8.
13. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Construction of Approximate Parametric Sets of Regulators for Weakly Nonlinear Discrete Control Problems on the Semi-axis based on the Asymptotic Expansions // 2022 15th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). – Moscow, 2022. – P. 1–5.
14. *Даник Ю.Э.* Численно-аналитические алгоритмы построения стабилизирующих регуляторов для слабонелинейных непрерывных и дискретных систем управления: дис. … канд. физ.-мат. наук.: 05.13.01: защищена 28.10.2019. — М., 2019. — 138 с.