DOI: 10.25728/mlsd.2023.0542

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ГЛАДКИХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБАЖЕНИЙ И РАВНОВЕСИИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ[1]

Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
arutyunov@cs.msu.ru, zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Исследована задача о точках совпадения гладких отображений конечномерных пространств. Получены достаточные условия существования точек совпадения без стандартного предположения на константы накрывания и липшицевости отображений. Обсуждается вопрос о применении полученных результатов к вопросу существования вектора равновесных цен в нелинейных моделях рынка.

Ключевые слова: накрывающие отображения, липшицевы отображения, точки совпадения, функция спроса, функция предложения, равновесная цена.

Введение

Пусть P, Y – заданные непустые множества, $S, D\colon P \to Y$ – заданные отображения. Исследование ряда прикладных задач приводит к необходимости исследования уравнений вида

$$S(p) = D(p) \tag{1}$$

с неизвестным $p \in P$. Так, например, в математических моделях рынка таким уравнением определяется вектор равновесных цен. В этих моделях $P \subset \mathbb{R}^n$ – это множество возможных векторов цен, S и D это функции предложения и спроса, значениями которых являются векторы, представляющие собой соответствующие вектору цен $p \in P$ наборы товаров, которые может приобрести потребитель или предложить производитель (см. [1, 2]).

Уравнение вида (1) в математике принято называть задачей о точке совпадения отображений S и D, а его решение $p \in P$ – точкой совпадения отображений S и D. Таким образом, большое значение для приложений имеют математические результаты, позволяющие устанавливать существование точек совпадения отображений, утверждения о свойствах точек совпадения и алгоритмы численного нахождения этих точек.

Сформулируем один из результатов теории точек совпадения, применяемый при исследовании математических моделей рыночного равновесия для доказательства существования равновесных цен и их приближенного вычисления. Для этого напомним сначала некоторые понятия.

Пусть P и Y – это метрические пространства, метрику в которых мы будем обозначать символом d. Замкнутый шар в P с центром в точке $p \in P$ радиуса $r \geq 0$ обозначим через $B(p, r)$, т.е.

$$B(p, r) = \{u \in P\colon d(p, u) \leq r\}.$$

Аналогичное обозначение будем использовать для замкнутых шаров в Y.

Пусть даны положительные числа α, β и R и точка $p_0 \in P$.

Отображение $S\colon P \to Y$ называется α-накрывающим относительно множества $M \subset P$, если

$$B(S(p), \alpha r) \subset S\big(B(p, r)\big) \quad \forall\, p \in P,\ \forall\, r \geq 0\colon\ B(p, r) \subset M.$$

Отображение $D\colon P \to Y$ называется β-липшицевым на множестве $M \subset P$, если

$$d(D(p), D(u)) \ \leq\ \beta d(p, u)$$

для любых $p, u \in M$.

Теорема 1 (см. [3]). Пусть отображение $S\colon P \to Y$ является α-накрывающим относительно шара $B(p_0, R) \subset P$ и непрерывным на этом шаре, а отображение $D\colon P \to Y$ является β-липшицевым на $B(p_0, R)$, шар $B(p_0, R)$ является полным, и имеют место неравенства

$$\alpha > \beta,\ \ d\big(S(p_0), D(p_0)\big) \leq (\alpha - \beta)R.$$

Тогда существует точка совпадения $p \in B(p_0, R)$ отображений S и D (т.е. точка, в которой равенство (1) выполняется), для которой

$$d(p_0, p) \leq \frac{1}{\alpha-\beta} d\big(S(p_0), D(p_0)\big).$$

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/*

Теорема 1 была получена в [3] при несколько более слабых предположениях полноты и непрерывности. Первый результат, касающийся применения накрывающих отображений в теории точек совпадения, был получен в [4].

В [5] теорема 1 использовалось для получения утверждения для доказательства существования положения равновесия в одной модели «спрос-предложение». При этом в [5] теорема 1 применялась к пространствам $P = \mathbb{R}^n_+$ и $Y = \mathbb{R}^m_+$ и некоторым непрерывно дифференцируемым на внутренности области определения отображениям S и D. Предположение непрерывной дифференцируемости позволяет сводить задачу отыскания констант α и β для нелинейных отображений отображений S и D к задаче нахождения аналогичных констант для линейных отображений $S'(p)$ и $D'(p)$, $p \in B(p_0, R)$.

В связи со сказанным представляется важным следующий вопрос. Возможно ли получение аналога теоремы 1 для гладкого отображения S с ослабленными предположениями накрываемости и и непрерывного отображения D. Ответ на этот вопрос позволил бы, в частности, существенно расширить класс моделей «спрос-предложение», в которых возможно установить существование равновесия за счет применения теории точек совпадения. В настоящей работе мы дадим содержательный ответ на этот вопрос.

1. Точки совпадения гладких отображений

Пусть заданы отображения $S, D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, положительное число R и точка $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Будем считать, что в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ заданы нормы, которые мы будем обозначать символом $|\cdot|$. Предположим, что отображение S непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности шара $B(p_0, R) \subset \mathbb{R}^n$, а отображение D непрерывно на этом шаре. Для произвольного линейного оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ положим

$$\operatorname{cov} A \coloneqq \sup \{\alpha \geq 0: B(0, \alpha) \subset AB(0,1)\},$$

$$\|A\| \coloneqq \sup \{|Ap|: p \in B(0,1)\}.$$

Число $\operatorname{cov} A$ принято называть константой накрывания линейного оператора A. Это число является характеристикой невырожденности этого оператора. В частности, $\operatorname{cov} A > 0$ тогда и только тогда, когда оператора A сюръективен. Соответственно, $\operatorname{cov} A = 0$ тогда и только тогда, когда оператора A вырождается.

Число $\|A\|$, называемое нормой линейного оператора A, совпадает с минимальной константой Липшица этого оператора. Для этих констант, очевидно, имеет место неравенство

$$0 \leq \operatorname{cov} A \leq \|A\|.$$

Зададим теперь вспомогательную функцию

$$a(t) \coloneqq \inf \{\operatorname{cov} S'(p):\ p \in B(p_0, t)\}.$$

Отметим, что функция a интегрируема (по Риману) на $[0, R]$, поскольку a является убывающей (нестрого) функцией на $[0, R]$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. Предположим, что

$$D\big(B(p_0, R)\big) \subset B\left(S(p_0),\ \int_0^R a(t)\, dt\right). \tag{2}$$

Тогда существует точка совпадения $p \in B(p_0, R)$ *отображений* S *и* D *(т.е. точка, в которой равенство (1) выполняется).*

Докажем теорему 2. Для этого применим к отображению S теорему 5.2 об обратной функции из [6]. По этой теореме при каждом достаточно большом натуральном j существует непрерывное отображение

$$G_j: B\left(S(p_0), (1 - j^{-1}) \int_0^R a(t)\, dt\right) \to B(p_0, R)$$

такое, что

$$S(G_j(y)) \equiv y.$$

Положим

$$D_j(p) \coloneqq (1 - j^{-1})\big(D(p) - S(p_0)\big) + S(p_0),\ \ p \in B(p_0, R).$$

Имеем

$$|D_j(p) - S(p_0)| \le (1 - j^{-1})|D(p) - S(p_0)| \quad \forall\, p \in B(p_0, R), \quad \forall\, j.$$

Отсюда и из предположения (2) следует, что

$$D_j\big(B(p_0, R)\big) \subset \left(S(p_0), (1 - j^{-1}) \int\limits_0^R a(t)\, dt \right) \quad \forall\, j.$$

Таким образом, корректно определена и непрерывна композиция

$$G_j\left(D_j(\cdot)\right) : B(p_0, R) \to\ B(p_0, R) \quad \forall\, j.$$

По теореме Брауэра о неподвижной точке при каждом достаточно большом j существует точка $p_j \in B(p_0, R)$ такая, что

$$p_j = G_j\left(D_j(p_j)\right).$$

Имеем

$$S(p_j) = S\left(G_j\left(D_j(p_j)\right)\right) = D_j(p_j) = (1 - j^{-1})\big(D(p) - S(p_0)\big) + S(p_0) \quad \forall\, j.$$

В силу компактности замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$ не ограничивая общности будем считать, что последовательность $\{p_j\} \subset B(p_0, R)$ сходится к некоторой точке $p \in B(p_0, R)$. Поэтому переходя к пределу в последнем равенстве при $j \to \infty$, получаем, что для построенной точки p выполняется равенство (1).

Теорема доказана.

Обсудим теорему 2. В отличие от теоремы 1, теорема 2 применима в случае, когда константа Липшица отображения D превышает константу накрывания отображения S. В свою очередь теорема 1 применима к отображениям, определенным на черезвычайно широком классе областей определения – на метрических пространствах. Таким образом, указанные теоремы независимы. В то же время теорема 2 дает новый инструмент исследования точек совпадения гладких отображений.

Приведем простой пример, в котором теорема 1 неприменима, но применима теорема 2.

Пусть

$$S(p) = p, \qquad D(p) = 1 + \sqrt[3]{p}, \qquad p \in \mathbb{R},$$
$$p_0 = 0, \quad R = 8.$$

Тогда нарушаются предположения теоремы 1, поскольку отображение D не липшицево на шаре

$$B(p_0, R) = [-8, 8].$$

В то же время, поскольку $a(t) = 1 \quad \forall\, t \ge 0$, то

$$\int\limits_0^R a(t)\, dt = \int\limits_0^8 dt = 8,$$

и, значит,

$$B\left(S(p_0), \int\limits_0^R a(t)\, dt \right) = [-8, 8].$$

Кроме того,

$$D\big(B(p_0, R)\big) = D([-8, 8]) = [-1, 3].$$

Таким образом,

$$D\big(B(p_0, R)\big) = [-1, 3] \subset\ [-8, 8] = B\left(S(p_0), \int\limits_0^R a(t)\, dt \right).$$

Значит предположение (2) теоремы 2 выполняется. Очевидно, что выполняются и остальные предположения теоремы 2. Отметим также, что из теоремы 2 вытекает существование решения p уравнения (1) для указанных отображений, лежащее в отрезке $[-8, 8]$.

Рассмотрение примера завершено.

Отметим, что проверка предположения (2) для конкретных отображений может вызвать затруднения. Сформулируем следствие теоремы (2), в котором предположение (2) заменим более сильным, но достаточно просто проверяемым предположением.

Предположим дополнительно, что отображение D непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности шара $B(p_0, R) \subset \mathbb{R}^n$. Зададим вспомогательную функцию

$$b(t) \coloneqq \sup\,\{D'(p) \colon\, p \in B(p_0, t)\},\ \ t \ge 0.$$

Отметим, что функция b интегрируема (по Риману) на $[0, R]$, поскольку b является возрастающей (нестрого) функцией на $[0, R]$.

Теорема 3. Предположим, что

$$|D(p_0) - S(p_0)| + \int_0^R b(t)\, dt \ \le\ \int_0^R a(t)\, dt\,. \tag{3}$$

Тогда существует точка совпадения $p \in B(p_0, R)$ отображений S и D (т.е. точка, в которой равенство (1) выполняется).

Докажем теорему 3. Для этого достаточно показать, что предположение (2) вытекает из (3). Покажем это.

Возьмем произвольную точку $u \in B(p_0, R)$. В силу (3) имеем

$$|D(u) - S(p_0)| \le |D(u) - D(p_0)| + |D(p_0) - S(p_0)| \le |D(u) - D(p_0)| + \int_0^R \big(a(t) - b(t)\big)dt.$$

Кроме того,

$$|D(u) - D(p_0)| = \left| \int_0^1 (D'(u + t(u - p_0))(u - p_0)\, dt \right| \le$$

$$\le \int_0^1 \|D'(u + t(u - p_0))\|\ |u - p_0|\, dt \ \le\ \int_0^1 b(\,t|u - p_0|)\, |u - p_0|\, dt =$$

$$= \int_0^{|u-p_0|} b(t)\, dt \le \int_0^R b(t)\, dt.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$|D(u) - S(p_0)| \le \int_0^R a(t)dt.$$

Отсюда и из произвольности выбора $u \in B(p_0, R)$ получаем, что выполняется (2).

Теорема 3 доказана.

2. Заключение

Полученные теоремы 2 и 3 о точках совпадения применимы к гладким отображениям конечномерных пространств. В отличие от них теорема 1 применима к отображениям метрических пространств. С другой стороны, в классе гладких отображений конечномерных пространств, предположение накрываемости в теоремах 2 и 3 слабее предположения накрываемости теоремы 1, а предположение липшицевости отображения D теоремы 1 в теоремах 2 и 3 заменено предположением непрерывности.

С точки зрения приложений к моделям математической экономики, полученные утверждения представляют определенный интерес. Одно из возможных дальнейших направлений исследования состоит в применении теорем 2 и 3 к модели «спрос-предложение» из [6] для получения условий существования равновесных цен. Ожидается, что за счет применения полученных в настоящей работе теорем о точках совпадения получится существенно ослабить условия существования равновесных цен из [6]. Кроме того, возможно применение полученных результатов к аналогичным моделям из [7–9].

Еще одним перспективным направлением исследования представляется использование нелокальных теорем об обратной функции в терминах производной Ф. Кларка для получения теорем о точках совпадения, аналогичных теоремам 2 и 3. В отличие от полученных в настоящей работе результатов, утверждения, использующие производную Ф. Кларка, могут быть применены не только к непрерывно дифференцируемым отображениям, но и к локально липшицевым отображениям.

Кроме того, в связи с полученными здесь теоремами о точках совпадения возникает естественный вопрос, продиктованный в первую очередь приложениями, об устойчивости точки совпадения в теоремах 2 и 3 к малым по норме равномерной сходимости возмущениям. Довольно очевидно, что если для отображений S и D выполнены предположения теоремы 2 или 3, то точка совпадения этих отображений неустойчива к сколь угодно малым возмущениям. Поэтому представляется важным получение дополнительных условий, при которых точка совпадения в теоремах 2 и 3 устойчива к малым возмущениям.

Литература

1. *Arrow K.J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. – 1954. – Vol. 22, N 3. – P. 265–290.
2. *Hildenbrand W., Sonnenschein H. (ed.)* Handbook of mathematical economics. – North-Holland, 1991. – 276 p.
3. *Arutyunov A. Avakov E. Gel'man B. Dmitruk A. Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. – 2009. – Vol. 5, N 1. – P. 5–16.
4. *Арутюнов А.В*. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. – Т. 416, N 2. – С. 151–155.
5. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. – Т. 53, N 2. – С. 225–237.
6. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.,* Глобальная и полулокальная теоремы о неявной и об обратной функции в банаховых пространствах // Математический сборник. 2022. – Т. 213, N 1. – С. 3–45.
7. *Pavlova N.G.* Study of the Continuous-Time Open Dynamic Leontief Model as a Linear Dynamical Control System // Differ. Equ. – 2019. – Vol. 55, N 1. – P. 113–119.
8. *Павлова Н.Г.* О применении результатов теории накрывающих отображений к исследованию динамических моделей экономических процессов // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2017. – Т. 22, N 6. – С. 1304–1308.
9. *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование. 2016. – Т. 58, N 3. – С. 3–22.