DOI: 10.25728/mlsd.2023.0521

ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПОДСИСТЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Сытов А.Н.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
an-sytov@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается модель производственной подсистемы предприятия, функционирующая в условиях неопределенности. Множество возможных значений неопределенных факторов задается с помощью дерева сценариев. Приводятся постановки оптимизационных задач для нахождения гарантирующих управлений. Их решение демонстрируется на численном примере.

Ключевые слова: производственная подсистема, гарантированный результат, минимаксное сожаление, сценарное планирование, линейное программирование, вычислительный эксперимент.

Введение

Моделированию производственных подсистем предприятия посвящено огромное количество научных изданий. Сошлемся только на две монографии, которые так или иначе определили наше восприятие этой тематики [1, 2].

Производственная подсистема рассматривается как некоторый управляемый объект, который функционирует в дискретном времени и в условиях неопределенности [3, 4]. Фазовые уравнения, которые описывают изменение состояния объекта во времени, представляют собой балансовые соотношения по количеству материальных ресурсов предприятия в последовательные моменты времени. Эти соотношения учитывают также запаздывание между затратами и выпуском. Фазовые уравнения дополняются заданными начальными условиями, ограничениями на управление и фазовые переменные. Указанные составляющие задачи управления и критерий эффективности содержат возмущения, которым подвергается подсистема в процессе своего развития.

Общепринятый подход к принятию решений в подобных задачах основывается на принципе гарантированного результата (или максиминной полезности Вальда) и на его усовершенствованном варианте – принципе минимального риска (сожаления), предложенного Сэвиджем [5].

Формализация этих принципов приводит к постановкам довольно сложных оптимизационных задач полубесконечного программирования, т.е. к задачам с конечным числом переменных и бесконечным числом ограничений [6]. Однако, если считать, что множество возможных значений неопределенных факторов конечно, эти задачи сводятся к “удобным” для их дальнейшего численного исследования задачам математического программирования, в частности линейного [7, 8]. Вопрос об аппроксимации задачи отыскания максимина со связанными переменными задачей, в которой неопределенность задается некоторым сеточным множество, вообще говоря, является довольно сложным [6]. Поэтому при указанном переходе мы будем говорить лишь о подмене исходной задачи.

В работе конечное множество возможных значений неопределенных факторов задается при помощи дерева сценариев. Такой подход часто используется в прикладных задачах. Основные его положения, а также методы построения таких деревьев описаны в работах [9]. Если бы мы обладали необходимыми опытными данными, то и для нашей модели могли бы строить дерево сценариев, используя методы статистики. Однако в данной работе мы делаем это экспертным образом.

Мы будем считать, что все переменные модели могут принимать только действительные значения, в противоположность задачам, где некоторые переменные принимают только целые значения. Такое допущение может показаться совершенно нереалистичным, ведь такие величины как число людей, машин и т.д. по своему смыслу должны измеряться только целыми числами. Однако такие ограничения делают задачу настолько сложной для решения, что часто лучшим бывает решить ее, рассматривая дискретные переменные как непрерывные и затем округлить до целых чисел полученные решения. Теоретически такой способ, естественно, не гарантирует, что мы получим решение исходной целочисленной задачи, но на практике он часто дает разумное решение. Если говорить о нашей задаче, для “крупных” предприятий такой подход кажется нам вполне приемлемым.

Более того, сам факт построения модели в дискретном времени находится в противоречии с предположением о непрерывном характере большинства процессов, протекающих на предприятии. Но если преследовать цель – проведение вычислительных экспериментов, а оптимизационные задачи, с которыми мы сталкиваемся, довольно сложны, то приходится ориентироваться на хороший уровень развития различных численных процедур для некоторых задач математического программирования, в особенности линейного, к которым формально принадлежат задачи планирования с линейными экономическими моделями в дискретном времени. Тем более на этапе численных расчетов по моделям с непрерывным временем тоже приходится прибегать к дискретизации времени.

1. Модель производственной подсистемы

Будем считать, что предприятие производит продукты и для этого ему требуются некоторые материальные ресурсы, к которым относятся: входящие продукты, которые он получает извне; исходящие продукты, изготовленные им самим; производственные фонды и труд рабочих разных специальностей. Эти же ресурсы, в свою очередь, требуются предприятию и для создания дополнительных средств производства, которые необходимы ему для выпуска продуктов.

Рассматриваемая динамическая модель описывает развитие производственной подсистемы предприятие с течением времени. Время считается дискретным, причем за его единицу принимается некоторый шаг – это может быть неделя, месяц, квартал. Всего плановый период содержит T шагов; их номера будут принимать значения $1, \ldots, T$. Все шаги разделяются моментами времени, начиная с нулевого и заканчивая моментом T. Так, первый шаг начинается в момент $t = 0$, а кончается в момент $t = 1$. Управление и неопределенности относятся непосредственно к моменту t. Фазовые переменные характеризуют состояние предприятия после совершаемых в этот момент операций, как бы подытоживая их.

Скажем вначале несколько слов о принятой в работе системе обозначений. Номенклатура входящих продуктов обозначается через I^+, исходящих – I^-, средств производства – J, трудовых специальностей – R. Под номенклатурой понимается некоторый перечень, в котором последовательно перечисляются названия ресурсов. Все векторы мыслятся как вектор-столбцы в привычном математическом смысле, несмотря на то что их координатное представление мы будем записывать в строку, в круглых скобках, с указанием у конкретной координаты в качестве нижнего индекса элемент соответствующей номенклатуры. В компьютерных программах такие объекты реализуются как упорядоченный ассоциативный массив, к элементам которого можно обращаться как по имени, так и порядковому номеру. Фазовый вектор, управление и неопределенные факторы выделяются с помощью жирного начертания.

Введем теперь обозначения для основных переменных модели. Фазовыми переменными считаются: $X^{p+}(t)$, $X^{p-}(t)$ – запасы входящих и исходящих продуктов; $X^f(t)$ – количество производственных фондов, $X^l(t)$ – численность персонала. В качестве управляющих выберем: $x^{p+}(t)$, $x^{p-}(t)$ – количества поступающих на предприятие и уходящих с него продуктов; $v^p(t)$, $v^f(t)$ – интенсивности производства и строительства; $x^{l+}(t)$, $x^{l-}(t)$ – количества принятых на работу и уволенных сотрудников, соответственно. К неопределенным факторам относятся коэффициенты, характеризующие скорости, с которыми продукты теряют свои качества $\lambda^{p+}(t)$, $\lambda^{p-}(t)$; средства производства выходят из строя $\lambda^f(t)$; сотрудники неконтролируемым образом покидают предприятие $\lambda^l(t)$. Также в эту группу входят переменные: $\eta^p(t)$, $\eta^f(t)$ – эффективности производства и строительства (эти величины в модели определяются коэффициентами, которые характеризуют отклонения фактического выпуска продуктов и дополнительных средств производств от планового); $\chi^p(t)$, $\chi^l(t)$ – задают внешние предложения входящих продуктов и рынка труда; $\pi(t)$ – плановое задание вышестоящего органа на поставку предприятием произведенных продуктов.

Здесь, все переменные – это векторы соответствующей размерности. Её можно легко установить из контекста и выразить через количество элементов в номенклатуре (под номенклатурой понимается некоторый перечень, в котором последовательно перечисляются названия ресурсов). Например, $v^p(t)$ – это вектор размерности $|I^-|$, а $v^f(t)$ – вектор размерности $|J|$.

Составим единые векторы соответствующих переменных:

$$\boldsymbol{X}(t) = \left(X^p(t), X^f(t), X^l(t)\right),$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \left(x^{p+}(t), x^{p-}(t), v^p(t), v^f(t), x^{l+}(t), x^{l-}(t)\right),$$

$$\boldsymbol{w}(t) = \left(\lambda(t), \eta^p(t), \eta^f(t), \chi^p(t), \chi^l(t), \pi(t)\right).$$

Здесь $X^p(t) = \left(X^{p+}(t), X^{p-}(t)\right)$ – запасы всех продуктов предприятия. Эта переменная включает в себя две векторных компоненты: первая соответствует входящим продуктам, а вторая – исходящим.

Приведем их координатные представления:

$$X^{p+}(t) = \left(X_i^{p+}(t),\ \ i \in I^+\right),\ X^{p-}(t) = \left(X_i^{p-}(t),\ \ i \in I^-\right).$$

Совершенно аналогично записываются координатные представления и для других переменных (в целях сокращения записи они в работе не приводятся). Отметим только, что коэффициенты, характеризующие выбытие ресурсов каждого типа, объединяются в один вектор $\lambda(t) = \left(\lambda^a(t),\ \ a \in (p+, p-, f, l)\right)$.

Динамика фазовых переменных описывается следующими разностными уравнениями с заданными начальными условиями:

$$X^{p+}(t) = X^{p+}(t-1) + x^{p+}(t) - y^{p+}(t) - \xi^{p+}(t),\ X^{p+}(-1) = \tilde{X}^{p+};$$

$$X^{p-}(t) = X^{p-}(t-1) + z^{p}(t) - y^{p-}(t) - x^{p-}(t) - \xi^{p-}(t),\ X^{p-}(-1) = \tilde{X}^{p-};$$

$$X^{f}(t) = X^{f}(t-1) + z^{f}(t) - \xi^{f}(t),\ X^{f}(-1) = \tilde{X}^{f};$$

$$X^{l}(t) = X^{l}(t-1) + x^{l+}(t) - x^{l-}(t) - \xi^{l}(t),\ X^{l}(-1) = \tilde{X}^{l};$$

$$t = 0, \dots, T.$$

В этих соотношениях: $z^p(t)$, $z^f(t)$ – выпуск продуктов и введенные в строй дополнительные производственные фонды в момент t; $y^{p+}(t)$, $y^{p-}(t)$ – потребление входящих и исходящих продуктов; $\xi^{p+}(t)$, $\xi^{p-}(t)$ – количества входящих и исходящих продуктов, теряющих свои качества; $\xi^f(t)$ – вышедшие из строя средства производства; $\xi^l(t)$ – количество сотрудников, покидающих предприятие неконтролируемым для него образом.

Пусть производство продукта i занимает θ_i^p шагов, а процесс создания дополнительных производственных фондов вида j длится θ_j^f шагов. Решения о начале производства и строительства, принятые до начального момента времени, но которые влияют на состояние предприятия в плановый период считаются известными: $\tilde{v}_i^p\left(-\theta_i^p\right), \dots, \tilde{v}_i^p(-1),\ i \in I^-;\ \tilde{v}_j^f\left(-\theta_j^f\right), \dots, \tilde{v}_j^f(-1),\ i \in J$.

Выпуски продуктов и новых средств производства выражаются через интенсивности посредством соотношений:

$$z_i^p(t) = \eta_i^p(t) v_i^p\left(t - \theta_i^p\right),\ i \in I^-;\ z_j^f(t) = \eta_j^f(t) v_j^f\left(t - \theta_j^f\right),\ j \in J.$$

Обозначим через $b_{\alpha,i}^{a,p}(\tau, t)$ – материальные затраты в момент t ресурса α типа a, необходимые для производства одной единицы продукта $a \in I^-$, начавшегося в момент τ. Аналогичные величины для процесса создания дополнительных средств производства $j \in J$ обозначаются как $b_{\alpha,j}^{a,f}(\tau, t)$. В этих обозначениях a означает один из элементов списка $(p+, p-, f, l)$, а индекс α – один из элементов соответствующей номенклатуры. Тогда для каждого рода деятельности предприятия суммарные затраты ресурса α типа a в момент t можно представить как

$$\psi_\alpha^{a,p}(t) = \sum_{i \in I^-} \sum_{\tau = t - \theta_i^p + 1}^{t} b_{\alpha,i}^{a,p}(\tau, t)\, v_i^p(\tau),\ \psi_\alpha^{a,f}(t) = \sum_{j \in J} \sum_{\tau = t - \theta_j^f + 1}^{t} b_{\alpha,j}^{a,f}(\tau, t)\, v_j^f(\tau).$$

В векторной форме количества потребляемых для производства и строительства входящих продуктов записываются как

$$\psi^{p+,p}(t) = \left(\psi_i^{p+,p}(t),\ \ i \in I^+\right), \psi^{p+,f}(t) = \left(\psi_i^{p+,f}(t),\ \ i \in I^+\right).$$

Аналогично вводятся векторы потребных затрат и для других типов ресурсов.

Запишем теперь полное потребление в момент t входящих и исходящих продуктов, присутствующие в записи фазовых уравнений:

$$y^{p+}(t) = \psi^{p+,p}(t) + \psi^{p+,f}(t), y^{p-}(t) = \psi^{p-,p}(t) + \psi^{p-,f}(t).$$

Неконтролируемое выбытие ресурсов типа $a \in (p+, p-, f, l)$ в момент t вводится так:

$$\xi^a(t) = \Lambda^a(t)\, X^a(t-1).$$

В это выражение входит диагональная матрица $\Lambda^a(t)$ с элементами $\lambda_\alpha^a(t)$.

Фазовые уравнения в векторно-матричной форме теперь можно записать в виде:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{w}(t)\right) X(t-1) + \sum_{\tau = t - \theta}^{t} \boldsymbol{B}\left(\tau, t, \boldsymbol{w}(t)\right) \boldsymbol{u}(\tau) + \boldsymbol{c}\left(t, \boldsymbol{w}(t)\right),$$

где θ – фиксированное положительное целое число, определяющее запаздывание. Каждый элемент соответствующих матричных функций, которые характеризуют зависимость от неопределенности, является аффинной функцией векторного аргумента $\boldsymbol{w}$. Слагаемое $\boldsymbol{c}(t, \boldsymbol{w}(t))$ возникает от учета доплановых решений о начале производства и строительства.

Ограничения на фазовые и управляющие переменные включают в себя:

- условия неотрицательности:

$$\boldsymbol{X}(t) \geqq 0, \boldsymbol{u}(t) \geqq 0, \quad t = 0, \dots, T;$$

- ресурсные ограничения:

$$\psi^{f,p}(t) + \psi^{f,f}(t) \leqq X^f(t), \psi^{l,p}(t) + \psi^{l,f}(t) \leqq X^l(t), \quad t = 0, \dots, T;$$

- требование, чтобы количества поступающих продуктов и нанимаемых сотрудников не превышали предложение извне:

$$x^{p+}(t) \leqq \chi^p(t), x^{l+}(t) \leqq \chi^l(t), \quad t = 0, \dots, T;$$

- терминальное ограничение:

$$X^{p-}(t) \geqq \underline{X}^{p-}.$$

Здесь и далее нулевой вектор специально не выделяется, на его присутствие указывает символ стоящей слева от него операции. Сравнение векторов понимается покомпонентно. Вектор $\underline{X}^{p-}$ считается фиксированным и по смыслу характеризует некоторое плановое задание.

В работе рассматриваются два критерия, в обоих случаях естественно стремление исследователя операции к их минимизации. В качестве первого выбирается

$$f_0 = \sum_{t=0}^{T} \sum_{i \in I^-} \nu_i \left| x_i^{p-}(t) - \pi_i(t) \right|.$$

Коэффициенты ν_i вводятся для того, чтобы абсолютные отклонения для разных продуктов были соразмерны, поскольку они могут выражаться в разных единицах измерений. Такой проблемы лишен второй критерий

$$f_0 = \max_{i \in I^-} \sum_{t=0}^{T} \left| x_i^{p-}(t) - \pi_i(t) \right| / \sum_{t=0}^{T} \pi_i(t).$$

В данном случае мы полагаем, что для каждого исходящего продукта i на интервале $t = 0, \dots, T$ возникает хотя бы одно задание $\pi_i(t) > 0$.

2. Постановки оптимизационных задач

Задача принятия решения формализуется как одношаговая: исследователь операции выбирает свое управление в виде функции времени сразу на весь интервал планирования. Одновременно с этим и независимо от такого выбора реализуется некоторая конкретная неопределенность. Критерий, множество возможных значений неопределенных факторов и все условия допустимости управлений считаются заранее известными. Риск возникает в связи с тем, что исследователь операции не знает точно, какая неопределенность может реализоваться.

Общепринятый подход к принятию решения при неопределенности основывается на принципе гарантированного результата: выбирается управление $\boldsymbol{u}^\circ(0), \dots, \boldsymbol{u}^\circ(T)$ доставляющие решение следующей оптимизационной задаче:

$$\min_{\boldsymbol{u}(0),\dots,\boldsymbol{u}(T)} \max_{\boldsymbol{w}(1) \in W(1),\dots,\boldsymbol{w}(T) \in W(T)} f_0(\boldsymbol{u}(0), \dots, \boldsymbol{u}(T), \boldsymbol{w}(1), \dots, \boldsymbol{w}(T)),$$

при ограничениях

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(0), \dots, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(1), \dots, \boldsymbol{w}(t)) \leqq 0, \quad t = 0, \dots, T.$$

Введем составной вектор управления $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}(0), \dots, \boldsymbol{u}(T))$ и неопределенных факторов $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{w}(1), \dots, \boldsymbol{w}(t))$ и представим эти ограничения как $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \leqq 0$, сохранив прежнее обозначение для вектор-функции в левой части неравенств. Перепишем теперь нашу задачу в более компактном виде:

$$\gamma^\circ = \min_{\boldsymbol{v}} \max_{\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{W}} \{f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \leqq 0\}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{W} = W(1) \times \cdots \times W(T)$ – множество возможных значений неопределенных факторов на всем интервале планирования.

Смысл этого решения такой: выбирая и используя $\boldsymbol{v}^{\circ}$, исследователь операции обеспечивает для предприятия значение критерия $f_0(\boldsymbol{v}^{\circ}, \boldsymbol{\omega})$, которое при реализации любой неопределенности $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{W}$ не может стать больше гарантированного значения γ°.

Гарантированное по риску управление $\boldsymbol{v}^{\star} = \left(\boldsymbol{u}^{\star}(0), \ldots, \boldsymbol{u}^{\star}(T)\right)$ находится в результате решения задачи

$$\rho^{\circ} = \min_{\boldsymbol{v}} \max_{\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{W}} \{f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \colon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \leqq 0\}, \tag{2.1}$$

где функция риска $\rho(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) = f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) - \varphi(\boldsymbol{\omega})$, при фиксированной неопределенности $\boldsymbol{\omega}$**,** характеризует “сожаление” использования $\boldsymbol{v}$, а не $\boldsymbol{v}^{*}$, такого, что

$$\varphi(\boldsymbol{\omega}) = f_0(\boldsymbol{v}^{*}, \boldsymbol{\omega}) = \min_{\boldsymbol{v}} \{f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \colon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) \leqq 0\}. \tag{2.2}$$

В данном случае исследователь операции, придерживаясь $\boldsymbol{v}^{\star}$, обеспечивает предприятию риск $\rho(\boldsymbol{v}^{\star}, \boldsymbol{\omega})$, который при реализации любой неопределенности $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{W}$ не может стать больше его гарантированного значения ρ°.

Будем считать множество $\boldsymbol{W}$ конечным и задавать его с помощью дерева сценариев. Корень располагается на нулевом уровне, ему соответствует начальный момент времени и приписывается известное значение $\boldsymbol{\omega}(0)$. Остальные вершины этого дерева располагаются на уровнях, соответствующих моментам времени $1, \ldots, T$. Листья лежат на терминальном уровне T. Каждой вершине на уровне t по пути σ от корня до некоторого лист, приписывается вектор $\boldsymbol{\omega}_{\sigma}(t)$, который характеризует одно из возможных состояний неопределенности в момент t. Путь σ от корня до терминальной вершины мы будем называть сценарием. Конечное множество сценариев обозначается через Σ, где каждый $\sigma \in \Sigma$ задает реализацию неопределенных факторов $\boldsymbol{\omega}_{\sigma}(t) = \left(\boldsymbol{w}_{\sigma}(1), \ldots, \boldsymbol{w}_{\sigma}(T)\right)$. Таким образом $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{\omega}_{\sigma},\ \sigma \in \Sigma)$.

Перепишем теперь (1) в виде задачи математического программирования:

$$\gamma^{\circ} = \min_{\boldsymbol{v}, \gamma \in \mathbb{R}} \{\gamma \colon \gamma \geq f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}) \leqq 0, \sigma \in \Sigma\}. \tag{3}$$

Постановка оптимизационной задачи (2.1, 2.2) для нахождения гарантированного по риску управления будет иметь вид

$$\rho^{\circ} = \min_{\boldsymbol{v}, \rho \in \mathbb{R}} \{\rho \colon \rho \geq f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}) - \varphi(\boldsymbol{\omega}_{\sigma}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}) \leqq 0, \sigma \in \Sigma\}. \tag{4.1}$$

Здесь, чтобы вычислить гарантированный риск ρ°, предварительно для каждого сценария $\sigma \in \Sigma$ требуется найти наилучший результат операции $\varphi(\boldsymbol{\omega}_{\sigma})$, решив следующую оптимизационную задачу:

$$\varphi(\boldsymbol{\omega}_{\sigma}) = \min_{\boldsymbol{v}} \{f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}) \colon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}) \leqq 0\}. \tag{4.2}$$

Прежде всего отметим, что условия допустимости управления $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma}) \leqq 0, \sigma \in \Sigma$ представляют собой линейные неравенства. Поскольку $f_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}_{\sigma})$ при каждом сценарии $\sigma \in \Sigma$ для обоих рассматриваемых критериев – выпуклые функции управления $\boldsymbol{v}$, легко показать, что и каждая из выписанных выше задач представляет собой задачу выпуклого программирования. Более того, с помощью введения дополнительных переменных они сводятся к линейным программам.

3. Численный пример

Тестовые расчеты проводились для модели производственной подсистемы предприятия, которое функционирует в дискретном времени на интервале от $t = 0$ до $T = 60$, что соответствует горизонту в пять лет, если шаг модели представлять равным одному месяцу. В расчетах присутствовало 5 видов входящих продуктов, 3 исходящих, 3 средств производства и 3 трудовых специальности. В таком случае размерность фазового вектора $\boldsymbol{X}(t)$ равна 14. Считалось, что изготовление первого продукта занимает 1 шаг, второго – 3 шага, а третьего – 6 шагов. Точно такие же значения были заданы и для аналогичных параметров, относящихся к производственным фондам.

Затраты ресурса α типа a, необходимые предприятию для производства одной единицы продукта i считаются постоянными в течение периода производства и независящими от момента его начала. В таком случае будем полагать эти коэффициенты равными $b_{\alpha,i}^{a,p}$ и заполнять ими транспонированные матрицы $\mathrm{B}^{a,p}$. Сказанное справедливо и для затрат, связанных с созданием дополнительных производственных фондов. В расчетах использовались следующие матрицы затрат входящих продуктов:

$$\mathrm{B}^{p+,p} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{B}^{p+,f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Первый и второй продукты рассматриваются как сырьевые, четвертый и пятый – фондообразующие. Поскольку третий столбец обеих матриц содержит ненулевые элементы, то третий продукт мы относим к смешанному типу – он одновременно является и сырьевым, и фондообразующим. Аналогично задаются и остальные матрицы затрат. Аналогично задаются и остальные матрицы затрат, но чтобы не загромождать изложение, здесь они не приводятся (мы вынесли их в отдельный файл, который разместили в репозитории [10]). Отметим только, что все исходящие продукты считаются сырьевыми, т.е. матрица $\mathrm{B}^{p-,f}$ задавалась как нулевая, а средства производства и трудовые специальности второго вида используются как для производства, так и для строительства.

Пусть до момента $t = 0$ предприятие не принимало никаких решений о начале производства и строительства. Далее, при единичных интенсивностях в плановый период рассчитывают величины

$$\bar{\psi}^a = \max_{t=0,\dots,T} \left(\psi^{a,p}(t) + \psi^{a,f}(t)\right),\ a \in (p+, p-, f, l)$$

и задаются начальные значения фазовых переменны: $\tilde{X}^{p+} = 0$, $\tilde{X}^{p-} = \bar{\psi}^{p-}$, $\tilde{X}^f = 0.1\bar{\psi}^f$, $\tilde{X}^l = 0$. Для фиксированного требования на запасы произведенных продуктов в конечный момент времени пример $\underline{X}^{p-} = (0\ \ 1\ \ 1.5)$.

Общее неопределенное состояние производственной подсистемы в момент t характеризуется переменной $\iota(t)$, принимающей одно из трех возможных значений: $-1, 0, +1$. Достаточно условно первое из них можно ассоциировать с неблагоприятным состоянием, второе – с нейтральным, а третье – с благоприятным. Пусть предприятие “стартует” из нейтрального состояния, т.е. в начальный момент времени известно, что $\iota(0) = 0$. Возможные изменения значения переменной $\iota(t)$ происходят в моменты $t_n = 12(n-1) + 1$, где $n = 1, 2, \dots$, причем на каждом из интервалов $t_n, \dots, t_{n+1} - 1$, $n = 1, \dots, 5$ она остается постоянной и равной $\iota(t_n)$. Таким образом, на всем интервале планирования существует $3^5 = 243$ различных реализаций $\iota(t)$, $t = 0, \dots, 60$. Каждой из них, естественно, сопоставить сценарий σ. Самой позитивной ситуации соответствует сценарий, для которого $\iota(t_n) = 1$, а самой негативной $\iota(t_n) = -1$; здесь в обоих случаях $n = 1, \dots, 5$.

Плановое задание предприятию на поставку продукта i задается так: $\pi_i(t) = \kappa_i(t)\,\mathring{\pi}_i$, если $t = 12n$, $n = 1, \dots, 5$; $\pi_i(t) = 0$, в остальные моменты времени. Здесь $\mathring{\pi}_i$ – некоторый фиксированный вектор, который мы будем называть базовым и полагать его равным $(1.5\ \ 1\ \ 0.5)$.

Переменные $\eta^p(t)$, $\eta^f(t)$, $\kappa(t)$ относятся к ключевым неопределенным факторам и единообразно выражаются через общее состояние неопределенности посредством $(1\ \ 1\ \ 1) + (0.2\ \ 0.2\ 0.2)\,\iota(t)$. Вектор, на который умножается $\iota(t)$, характеризует отклонение соответствующей переменной от ее значения в нейтральном состоянии. В данном случае это значение задается вектором, состоящим из одних единиц, и соответствует начальному значению переменной. Отметим, что все отклонения носят однонаправленный характер.

Поскольку размерности всех трех векторов равны друг другу, такой способ задания уместен и вполне удобен для проведения простых расчетов. В общем случае для каждой переменной из перечня ключевых неопределенностей задается свое более сложное выражение. Разным реализациям $\iota(t_n) = -1, +1$ в год n могут соответствовать разные векторы-отклонения и совершенно необязательно, чтобы их компоненты имели одинаковые значения или знаки.

Остальные переменные, которые входят в $\boldsymbol{w}(t)$: $\lambda^a(t)$, $a \in (p+, p-, f, l)$ и $\chi^p(t)$, $\chi^l(t)$ не относятся к ключевым неопределенностям – они не выражаются явно через $\iota(t)$.

Расчеты проводились в двух вариантах: с выбытием ресурсов и без. Будем полагать, что все ресурсы одного типа выбывают с одной и той же скоростью. Для входящих продуктов она была выбрана равной 0.02, для исходящих продуктов и средств производства 0.01, для трудовых ресурсов 0. Отсутствие выбытия ресурсов типа a соответствует ситуации, когда все коэффициенты λ^a равны нулю.

Переменные, которые ограничивают сверху поступления на предприятие входящих продуктов $x^{p+}(t)$ и рабочей силы $x^{l+}(t)$ задавались так: $\chi^p(t) = 0.5\,\bar{\psi}^{p+}$, $\chi^l(t) = 0.2\,\bar{\psi}^l$.

Каждом сценарию σ в момент t ставится в соответствие вектор $\boldsymbol{w}_\sigma(t)$ и его “развертка” $\boldsymbol{\omega}_\sigma$. От сценария к сценарию меняются только их компоненты, которые мы отнесли к ключевым неопределенным факторам. Так задается дерево $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{\omega}_\sigma,\ \sigma \in \Sigma)$; в данном случае $|\Sigma| = 243$.

Будем интересоваться изменением гарантированного результата операции γ° и гарантированного риска ρ°, масштабируя базовый плановый вектор; коэффициент масштабирования обозначим через μ.

В результаты включается значение такого показателя как наихудший результат операции среди наилучших при фиксированной неопределенности

$$\varphi^\circ = \max_{\sigma \in \Sigma} \varphi(\boldsymbol{\omega}_\sigma).$$

Его легко определить, построив полигон значений $\varphi(\boldsymbol{\omega}_\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, который используется для вычисления ρ°.

Расчеты проводились при 27 значениях параметра μ на интервале от 0 до 5 в случае первого критерия и на интервале от 0.2 до 5 в случае второго, почти равномерно покрывающих эти интервалы с шагом 0.2. Для первого критерия полагалось, что $\nu_i,\ i \in I^-$. Короткие фрагменты результатов для каждого критерия представлены в таблицах 1, 2 (опять же, в полном объеме они расположены в [1]). Вариант расчета с выбытием ресурсов здесь и далее обозначается как $\lambda \geq 0$ (эта запись означает, что хотя бы одна скалярная компонента вектора λ больше нуля), а без выбытия $\lambda = 0$.

Таблица 1. Показатели для первого критерия

$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\varphi^\circ, \lambda = 0}$	$\boldsymbol{\gamma^\circ, \lambda = 0}$	$\boldsymbol{\rho^\circ, \lambda = 0}$	$\boldsymbol{\varphi^\circ, \lambda \geq 0}$	$\boldsymbol{\gamma^\circ, \lambda \geq 0}$	$\boldsymbol{\rho^\circ, \lambda \geq 0}$
0	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1	0.	3.	3.	0.	3.	3.
2	3.71	13.31	13.31	4.45	14.02	14.02
3	13.31	28.94	26.39	14.02	29.93	26.50
4	23.30	46.94	35.68	24.40	47.86	34.93
5	34.94	64.94	41.60	35.87	65.86	40.93

Таблица 2. Показатели для второго критерия

$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\varphi^\circ, \lambda = 0}$	$\boldsymbol{\gamma^\circ, \lambda = 0}$	$\boldsymbol{\rho^\circ, \lambda = 0}$	$\boldsymbol{\varphi^\circ, \lambda \geq 0}$	$\boldsymbol{\gamma^\circ, \lambda \geq 0}$	$\boldsymbol{\rho^\circ, \lambda \geq 0}$
0	0.	0.2	0.2	0.	0.2	0.2
1	0.	0.2	0.2	0.	0.2	0.2
2	0.345	0.563	0.563	0.370	0.580	0.580
3	0.563	0.709	0.621	0.580	0.720	0.590
4	0.672	0.782	0.529	0.685	0.790	0.443
5	0.738	0.825	0.458	0.748	0.832	0.361

Для обоих критериев рассчитанные зависимости $\varphi^\circ(\mu)$, $\gamma^\circ(\mu)$ имеют монотонный характер, причем для каждого μ значение соответствующего показателя в случае выбытия ресурсов не меньше (если $\mu \geq 1.4$, то и строго больше), чем значение, когда выбытие отсутствует. В случае с риском для первого критерия зависимость $\rho^\circ(\mu)$ также является монотонной, однако этот характер нарушается для второго критерия.

Следует обратить внимание на следующее наблюдение. Для каждого критерия, начиная с некоторого μ_1, между зависимостями с выбытием ресурсов и без возникает своего рода “переворот”. Так, если $\mu < \mu_1$, значение гарантированного риска, рассчитанное при наличии выбытия ресурсов, было не меньше, чем в случае без выбытия; если $\mu \geq \mu_1$, картина становится противоположной. Для первого критерия $\mu_1 = 3.4$; для второго – переворот наступает “раньше”, при $\mu_1 = 2.7$.

Графики 1, 2 иллюстрируют это наблюдение. На них мы использовали линейную интерполяцию между соседними точками и выделили область между двумя полученными кривыми.

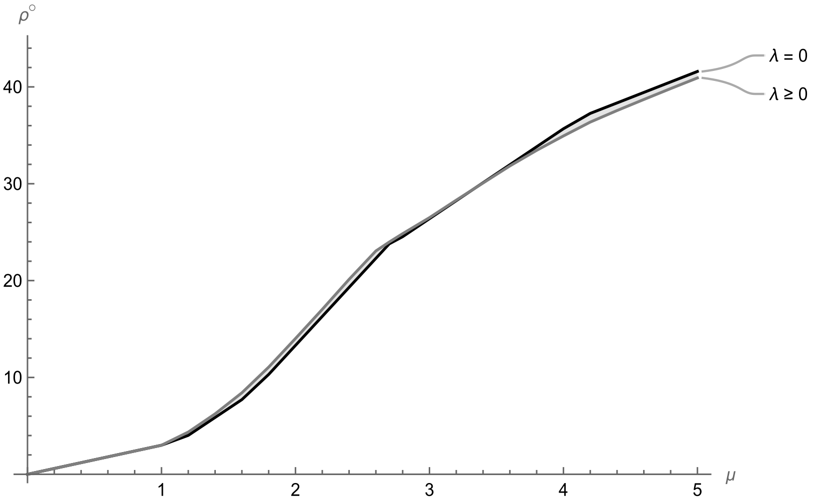

Рис. 1. Зависимость гарантированного риска от масштаба планового задания для первого критерия

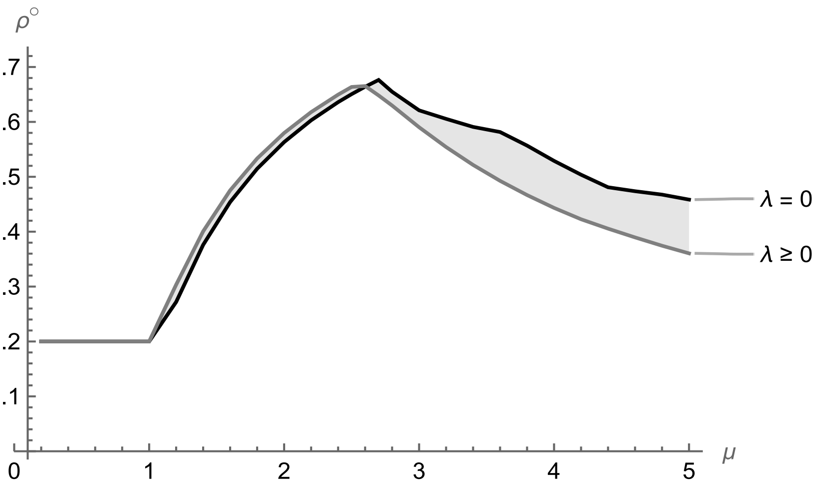

Рис. 2. Зависимость гарантированного риска от масштаба планового задания для второго критерия

Придадим полученным результатам теперь несколько иное графическое представление: при каждом μ по оси абсцисс будем откладывать рассчитанное значение показателя $\gamma^\circ(\mu)$, а по оси ординат – $\rho^\circ(\mu)$. Опять же используем линейную интерполяцию между соседними точками и выделим область между полученными кривыми для двух случаев – с выбытием ресурсов и без. Действуя таким образом, для двух критериев получим графики 3, 4.

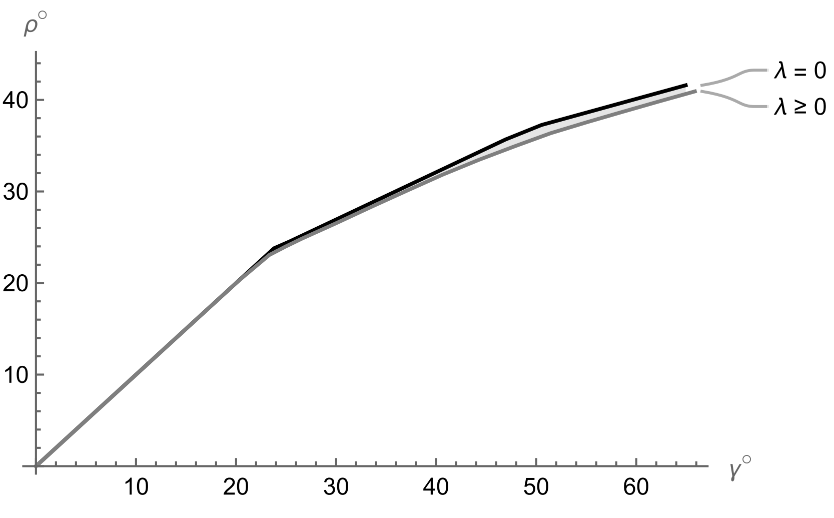

Рис. 3. Параметрическая кривая гарантированный исход операции – гарантированный риск для первого критерия

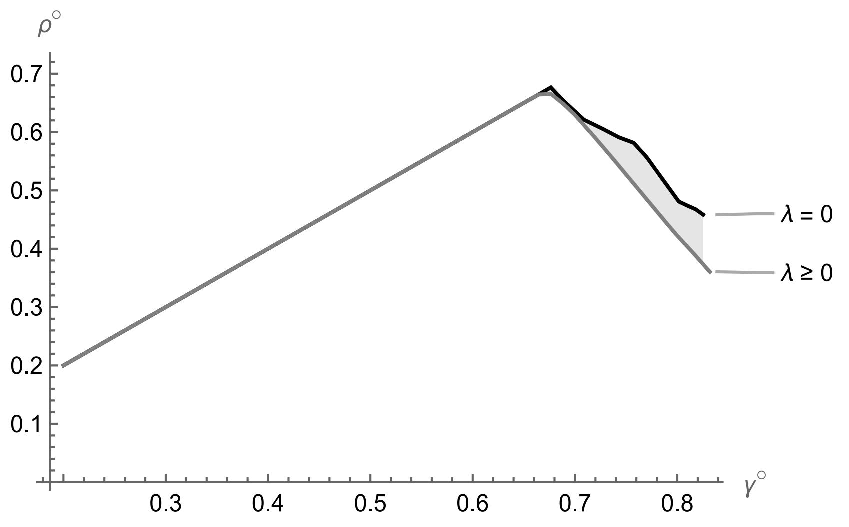

Рис. 4. Параметрическая кривая гарантированный исход операции – гарантированный риск для второго критерия

Здесь обращает на себя внимание следующий факт. Для каждого критерия и варианта расчета $\lambda = 0$, $\lambda \geq 0$ полученная параметрическая кривая, начиная с некоторого значения μ_2, загибается вниз, отклоняясь от прямой $\rho^\circ = \gamma^\circ$, причем в случае второго критерия происходит даже смена направления. Такая ситуация возникает, как только $\varphi(\boldsymbol{\omega}_\sigma) > 0,\ \sigma \in \Sigma$. Для обоих критериев значения параметра μ_2 совпадали и $\mu_2(\lambda = 0) = 2.8$, $\mu_2(\lambda \geq 0) = 2.6$.

В заключение приведем графики 5, 6 – оптимальных траекторий запасов произведенных продуктов $X^{p-\star}(t)$ и количеств производственных фондов $X^{f\star}(t)$ при гарантированном по риску управлении для второго критерия.

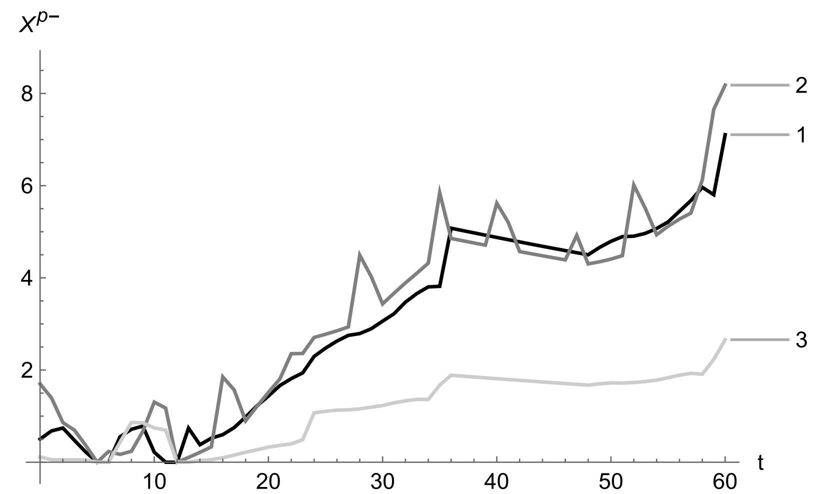

Рис. 5. Оптимальные траектории запасов произведенных продуктов при гарантированном по риску управлении для второго критерия

Эти траектории строятся после подстановки в соответствующие фазовые уравнения управления $\boldsymbol{v}^*$ и реализации неопределенности, доставляющих решение задаче (4.1, 4.2). Мы рассматриваем вариант расчетов с выбытием ресурсов при $\mu = 5$. Он примечателен тем, что в нем оптимальное решение получается ни на “крайнем” сценарии, а на сценарии, при котором состояния неопределенности $\iota(t)$ по годам будут $-1, +1, +1, -1, +1$.

4. Заключение

В работе предложен вычислительный инструмент построения гарантирующих управлений в достаточно простой модели производственной подсистемы предприятия. Сопутствующая методология может быть применена и при всевозможных усложнения модели. При этом даже в линейном случае, часто возникают довольно “тяжелые” как с позиции времени вычислений, так и с позиции затрат оперативной памяти, необходимой для хранения ограничений, оптимизационные задачи. Тогда можно прибегнуть к сокращению интервала планирования или/и рассматривать дерево с меньшим числом сценариев. Вообще говоря, вопросы, связанные с чувствительностью полученных решений к изменению множества возможных значений неопределенных факторов (соответственно, к изменению сценарного дерева) требуют отдельного изучения.

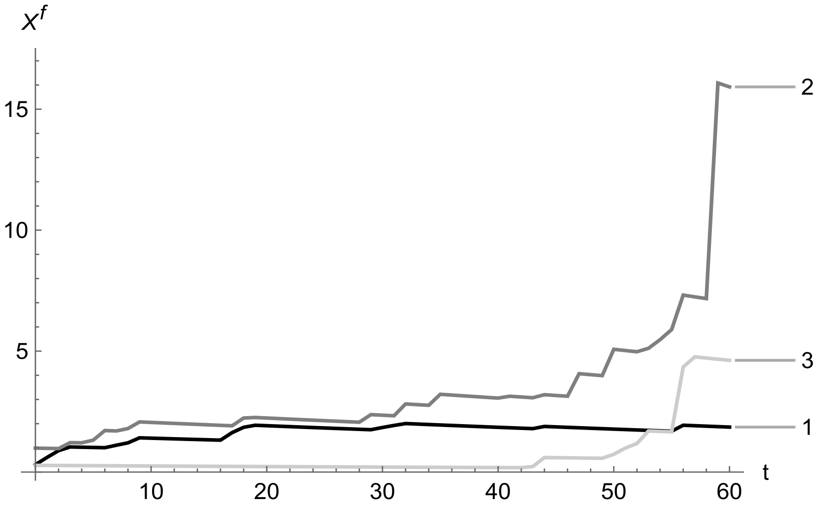

Рис. 6. Оптимальные траектории количеств производственных фондов при гарантированном по риску управлении для второго критерия

Литература

1. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984. – 392 с.
2. *Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Уздемир А.П.* Математическое описание элементов экономики. – М.: Физматлит, 1994. – 416 с.
3. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
4. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А, Тихомиров В.М.* Оптимальное управление движением. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.
5. *Жуковский В.И., Жуковская Л.В.* Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
6. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
7. *Л. Лэсдон.* Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
8. *Еремин И.И.* Линейная оптимизация и системы линейных неравенств: учеб. пособие для вузов / И.И. Еремин. – М.: Издательский центр “Академия”, 2007. – 256 с.
9. *Miklós Vázsonyi S.B.* Overview of scenario tree generation methods, applied in financial and economic decision making // Social and Management Sciences. – 2006. – Vol. 14, N 1. – P. 29–37.
10. https://github.com/an-sytov/MLSD2023