DOI: 10.25728/mlsd.2023.0512

ВЛИЯНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАЗБУРИВАНИЯ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НА МАКСИМУМ СОВОКУПНОЙ НАКОПЛЕННОЙ ДОБЫЧИ ГАЗА

Скиба А.К.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

a.k.skiba@mail.ru

Аннотация. Анализируется агрегированная динамическая модель разработки группы газовых месторождений. Разбуривание залежей осуществляется последовательно одним предприятием. Формулируется и решается задача максимизации совокупной накопленной добычи за фиксированный период при ограничении на их общее финансирование. Предложены две процедуры численного поиска максимального решения.

Ключевые слова: агрегированная динамическая модель освоения газовых месторождений, максимизация накопленной добычи, последовательность ввода месторождений в разработку, процедура численного поиска максимального решения.

Введение

Природный газ является особо ценным минеральным продуктом [1]. Его роль в народнохозяйственном обороте велика. Добытый газ прямо или косвенно используется практически во всех отраслях нашей страны. Россия обладает этим продуктом. В недрах земли хранятся богатейшие запасы природного газа.

Большая часть отечественных запасов сосредоточена на территории Ямало-Ненецкого автономного округа. Среди других регионов добычи газа — северные моря, Поволжье, Урал, Сибирь, Кавказ и даже Дальний Восток. Распределены запасы природного газа по территории России неравномерно. Возникают сложнейшие задачи, состоящие не только в добыче газа, но и в доставке его потребителю в требуемом объеме с учетом динамики поставок.

Природный газ содержит различные примеси, в число которых входит нефть, конденсат, сера и т. п. Среди примесей имеются как нужные для промышленности химические вещества, так и вредные при их транспортировке. Возникают проблемы извлечения их на месте добычи природного газа, транспортировки или утилизации примесей с учетом экологических требований. Эти и другие вопросы добычи природного газа затрагивались в монографиях [2, 3].

Интересны другие задачи, решаемые в отделе Математических методах регионального программирования ФИЦ ИУ РАН. К ним относится следующие решенные проблемы [4, 5]. Для их решения использовался математический аппарат оптимального управления [6, 7].

Рассматриваемая в настоящей работе задача касается выбора оптимальной последовательности разбуривания группы месторождений. Максимизируется совокупная накопленная добыча газа при внешнем ежегодном финансировании.

1. Построение модели, постановка и решение оптимизационной задачи

Прежде чем приступить к построению модели, мы вводим следующие обозначения, принимающие вещественные значения:

- T – горизонт планирования;
- t – текущее время ($0 \le t \le T$);
- $Q_i(t)$ – текущая добыча газа на i-ом месторождении;
- $q_i(t)$ – средний дебит добывающих скважин в момент t на i-ом месторождении;
- q_i^0 – начальный средний дебит добывающих скважин на i-ом месторождении;
- $n_i(t)$ – количество скважин, вводимых в строй в единицу времени на i-ом месторождении;
- $\bar{n}_i$ – максимальная возможность по вводу в строй новых скважин;
- $N_i(t)$ – действующий фонд добывающих скважин в момент t на i-ом месторождении;
- N_i^0 – начальный фонд добывающих скважин на i-ом месторождении;
- $V_i(t)$ – извлекаемый запас газа, оставшийся в залежи в момент t на i-ом месторождении;
- V_i^0 – начальный извлекаемый запас газа на i-ом месторождении;
- c_i – стоимость строительства одной скважины на i-ом месторождении;
- h_i – средняя глубина залегания i-ой залежи;
- γ – удельные капиталовложения в расчете на единицу длины скважины;

- $v_i(t)$ – механическая скорость бурения скважин одним предприятием на i-ом месторождении в момент t;
- $\bar{v}$ – максимальная механическая скорость бурения скважин одним предприятием;
- K – капиталовложения, выделяемые на строительство новых скважин в единицу времени.

Во введенных обозначениях используется индекс i, который принимает целочисленные значения в промежутке от 1 до m.

Мы делаем следующие аппроксимирующие предположения:

- группа состоит из m месторождений;
- каждому месторождению соответствует одна залежь;
- в любой момент t газовое месторождение покрывается равномерной сеткой добывающих скважин;
- управление динамическим процессом разработки месторождения осуществляется за счет выбора скорости бурения скважины $v_i(t)$, удовлетворяющее нижеописанному ограничению (6);
- бурение скважины, ее обустройство и ввод ее в разработку месторождения происходят в один и тот же момент времени;
- весь извлекаемый запас газа может быть добыт с помощью любого числа скважин;
- дебиты всех скважин на месторождении одинаковы;
- резерв скважин не создается;
- бурение месторождений предприятием осуществляется последовательно и в дальнейшем к работам на этих месторождениях оно не возвращается.

Стоимость строительства одной скважины и прирост их количества в момент t на i-ом месторождении определяются по формулам:

$$c_i = \gamma h_i; \tag{1}$$

$$n_i(t) = \frac{v_i(t)}{h_i}. \tag{2}$$

Опишем модель разработки группы газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами [2, 3]. Между переменными устанавливаются зависимости, представленные в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{N}_i = n_i(t) = \frac{v_i(t)}{h_i}, \tag{3}$$

$$\dot{q}_i = -\frac{q_i^0}{V_i^0} q_i(t) N_i(t) = -\alpha_i^0 q_i(t) N_i(t), \tag{4}$$

$$\dot{V}_i = -Q_i(t) = -q_i(t) N_i(t) \tag{5}$$

при ограничении

$$0 \le n_i(t) \le \bar{n}_i \text{ или}$$

$$0 \le v_i(t) \le \bar{v} \tag{6}$$

с начальными условиями

$$V_i^0 > 0, \tag{7}$$

$$q_i^0 > 0, \tag{8}$$

$$N_i^0 = 0. \tag{9}$$

Заметим, что в описании дифференциального уравнения (4) мы ввели еще одно дополнительное обозначение:

$$\alpha_i^0 = \frac{q_i^0}{V_i^0}. \tag{10}$$

Одна буровая компания осуществляет капитальные вложения в месторождения. Мощность буровых установок является существенным ограничением темпов разработки. Следовательно,

$$K = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i(t) = \gamma \sum_{i=1}^{m} v_i(t) = \gamma \bar{v}.$$

Если в действительности капиталовложения меньше $\gamma\bar{v}$, то мы уменьшаем на соответствующую величину максимальную скорость буровых установок $\bar{v}$. Поэтому считаем справедливым выполнение последнего соотношения. Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{m} v_i(t) = \bar{v}. \tag{11}$$

Из (3) и (4) с учетом (2), (8) и (9) приходим к следующим формулам:

$$N_i(t) = \int_0^t n_i(\theta)\, d\theta = \int_0^t n_i(\theta)\, d\theta; \tag{12}$$

$$q_i(t) = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i^0 \int_0^t (t-\theta) n_i(\theta)\, d\theta\right] = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i^0 \int_0^t (t-\theta) \frac{v_i(\theta)}{h_i} d\theta\right]. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует $N_i(t) \geq 0$ и $q_i(t)>0$.

Очевидно, что максимальная накопленная добыча газа за фиксированный период бурения i-го месторождения [0, τ] достигается при $v_i(t)=\bar{v}$. Для остальных месторождений $v_{k\neq i}(t)=0$. В этом случае (12) и (13) с учетом (8) и (9) представятся в следующем виде:

$$N_i(t) = \frac{\bar{v}}{h_i} t; \tag{14}$$

$$q_i(t) = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i^0 \frac{\bar{v}}{2h_i} t^2\right]. \tag{15}$$

Текущая и накопленная добыча газа описываются формулами:

$$Q_i(t) = q_i^0 \frac{\bar{v}}{h_i} t \exp\left[-\alpha_i^0 \frac{\bar{v}}{2h_i} t^2\right]; \tag{16}$$

$$\int_0^\tau Q_i(t)\, dt = \int_0^\tau q_i(t) N_i(t)\, dt = \frac{q_i^0 - q_i(\tau)}{\alpha_i^0} = \frac{q_i^0}{\alpha_i^0}[1 - \exp(-\alpha_i^0 \frac{\bar{v}}{2h_i} \tau^2)]. \tag{17}$$

Опишем множество допустимых последовательностей бурения месторождений. Фиксируем последовательность из m месторождений. Время начала бурения первого месторождения обозначим через $\tau_0=0$. Время окончания – τ_1. Временная продолжительность бурения скважин первого по порядку месторождения равна $\tau_1-\tau_0$. Если $\tau_1-\tau_0=0$, то данное месторождение не разбуривается и, соответственно, не разрабатывается. Аналогичная связь устанавливается для остальных месторождений. Время возможного начала бурения последнего m-го месторождения равно величине τ_{m-1}, время его завершения – $\tau_m=T$. При этом выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{m} (\tau_i - \tau_{i-1}) = T \text{ и } \tau_i \geq \tau_{i-1},\ i = 1, 2,\ \ldots, m. \tag{18}$$

Добыча на каждом разрабатываемом месторождении начинается с момента начала бурения скважин. Темп бурения скважин на i_1-ом месторождении в течение всего временного периода $\tau_{i1}-\tau_{i1-1}$ постоянен. Он равен значению $\bar{v}$. По завершении бурения скважин добыча на месторождении продолжается в режиме истощения вплоть до срока окончания планового периода T. Для остальных $i \neq i_1$ месторождений скорость бурения скважин $v_i(t)$ в промежутке от τ_{i1-1} *до* τ_{i1} равно нулю.

Задача 1. *На множестве всех допустимых последовательностей бурения месторождений требуется найти максимум совокупной накопленной добычи:*

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{m} q_i(t) N_i(t) dt \to max. \tag{19}$$

Для фиксированной последовательности бурения месторождений применим теорему Вейерштрасса, согласно которой на замкнутом ограниченном множестве непрерывная функция достигает своего максимального значения. Множество всех переборов последовательностей бурения месторождений является конечным. Поэтому решение задачи 1 существует.

Подсчитаем количество всевозможных ситуаций, которые могут возникнуть при решении данной задачи. Предположим, что при решении задачи на максимум накопленной добычи бурятся последовательно все m месторождений. Таких порядков (перестановок) равно $m!$. Предположим, что бурятся $m-1$ месторождение, тогда количество таких последовательностей равно

$$(m-1)!\, m = m! = \Gamma(m+1),$$

где гамма функция, обладающая свойством $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$, задается несобственным интегралом:

$$\Gamma(m+1)=\Gamma(m,s=0)=\int\limits_0^{\infty} t^{m-1}\,e^{-t}dt.$$

Предположим, что бурятся k месторождений (k = 1, 2, ..., m). В этом случае количество последовательностей вычисляется по формуле:

$$C_m^k k!=\frac{m!}{(m-k)!}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-k)}.$$

Совокупное количество всех порядков ввода месторождений задается формулой:

$$\Pi(m)=\sum\nolimits_{k=1}^{m}\frac{m!}{(m-k)!}=e\Gamma(m+1,1)-1=e\int_0^{\infty}t^m\,e^{-t}dt-1. \qquad (20)$$

Вычислим количество всех последовательностей бурения месторождений в зависимости от их количества. Для этого воспользуемся формулой (20):

$$\Pi(1)=1;\quad \Pi(5)=325;\ \Pi(10)=9864100;\quad \Pi(15)=3.554627472075\,*\,10^{12}$$

Мы наблюдаем резкое увеличение количества порядков ввода месторождений с увеличением числа месторождений. Поэтому прямой подход решения задачи 1 приводит к громадным вычислениям.

Для каждой последовательности ввода месторождений решается оптимизационная задача. Далее мы сравниваем результаты решения оптимизационных задач на множестве всех последовательностей ввода и выбираем максимальное значение.

Для относительно небольшого множества месторождений, равного 15 шт., нам придется перебрать более трех с половиной триллионов вариантов и не только перебрать, но и решить для каждого варианта задачу на максимум совокупной накопленной добычи.

Простейшие алгоритмы поиска оптимального решения состоят в следующем. Чтобы найти глобальный максимум, требуется сначала просканировать с некоторым шагом рассматриваемую область и вычислить все локальные значения и потом выбрать из них наибольший. Другим вариантом будет простое сканирование с вычислением значений функции, позволяющее выделить из нее подобласть наибольших значений функции и осуществить поиск глобального экстремума, уже находясь в его окрестности.

Численное решение данной задачи методом перебора вариантов сталкивается со значительными трудностями. Для их преодоления необходимо провести полное аналитическое исследование задачи 1 и найти реалистичный алгоритм численного решения поставленной задачи.

Рассмотрим множество месторождений $\Omega\equiv\{1,2,\dots,m\}$ и соответствующий ему набор чисел $\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m\}$, который удовлетворяет следующим соотношениям:

$$0=\tau_0\le\tau_1\le\tau_2,\dots,\le\tau_m=\mathrm{T}; \qquad (21)$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m}(\tau_i-\tau_{i-1})=T. \qquad (22)$$

Формируем подмножество разбуренных месторождений $\omega\subseteq\Omega$. Если выполняется строгое неравенство $\tau_i>\tau_{i-1}$, то i-ое месторождение включаем в подмножество ω. Каждому элементу $i\in\omega$ соответствует продолжительность бурения i-го месторождения, равное $\tau_i-\tau_{i-1}$. Из (22) вытекает, что подмножество ω не пусто.

С учетом (4), (10), (17), (21) и (22) преобразуем интеграл (19):

$$F=\int_0^T\sum\nolimits_{i=1}^{m}q_i(t)N_i(t)dt=\sum\nolimits_{i=1}^{m}\frac{q_i^0}{\alpha_i^0}\left\{1-exp\left[-\frac{\alpha_i^0\bar{v}(\tau_i-\tau_{i-1})^2}{2h_i}-\frac{\alpha_i^0\bar{v}(\tau_i-\tau_{i-1})(T-\tau_i)}{h_i}\right]\right\}=$$

$$\sum\nolimits_{i\in\omega}\frac{q_i^0}{\alpha_i^0}\left\{1-exp\left[-\frac{\alpha_i^0\bar{v}(\tau_i-\tau_{i-1})(2T-\tau_i-\tau_{i-1})}{2h_i}\right]\right\}. \qquad (23)$$

Будем считать, что месторождения пронумерованы в порядке убывания значений $\ln\left(\frac{q_i^0}{h_i}\right)$.

Теорема 1. *Пусть набор чисел* $\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m\}$ *при условии* (21) *и* (22) *максимизирует функцию* (23) *для фиксированной последовательности группы газовых месторождений* $\Omega\equiv\{1,2,\dots,m\}$, *тогда множество* $\tilde{\omega}$ *единственно и для любого* $i\in\tilde{\omega}$ *и любого* $j\in\Omega/\tilde{\omega}$ *выполняются следующие соотношения:*

$$\frac{\tilde{q}_i(T)}{h_i} = exp(\lambda^{\tilde{\omega}}) > \frac{\tilde{q}_j(T)}{h_j} = \frac{q_j^0}{h_j}, i \in \tilde{\omega}, j \in \Omega/\tilde{\omega}. \quad (24)$$

Заметим, что $\frac{\tilde{q}_i(T)}{h_i}$ принимает одинаковые значения для всех $i \in \tilde{\omega}$.

Доказательство. 1) Пусть $i \in \tilde{\omega}$ и $i+1 \in \tilde{\omega}$. В этом случае выполняется неравенство: $2 \leq |\tilde{\omega}| \leq |\Omega| = m$, где $|\tilde{\omega}|$ − мощность конечного подмножества. Воспользуемся необходимым условием максимума функции многих переменных. Для этого продифференцируем функцию (23) по τ_i и, приравняв ее к нулю, в результате получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_i} = \frac{q_i^0}{h_i}\bar{v}(T-\tau_i)exp\left[-\frac{\alpha_i^0\bar{v}(\tau_i-\tau_{i-1})(2T-\tau_i-\tau_{i-1})}{2h_i}\right] -$$
$$\frac{q_{i+1}^0}{h_{i+1}}\bar{v}(T-\tau_i)\exp\left[-\frac{\alpha_{i+1}^0\bar{v}(\tau_{i+1}-\tau_i)(2T-\tau_{i+1}-\tau_i)}{2h_{i+1}}\right] = 0.$$

Откуда приходим к следующему равенству:

$$\frac{\tilde{q}_i(T)}{h_i} = \frac{\tilde{q}_{i+1}(T)}{h_{i+1}} = exp(\lambda^{\tilde{\omega}}). \quad (25)$$

Равенство (25) справедливо для всех $i \in \tilde{\omega}$ и $i+1 \in \tilde{\omega}$.

2) Мощность подмножества $|\tilde{\omega}|$ принимает значения от 1 до m. Пусть $|\tilde{\omega}|=1$ и с учетом нумерации справедливо неравенство: $\frac{q_1^0}{h_1} > \frac{q_j^0}{h_j}$. Предположим, что для некоторого элемента $j \in \Omega/\tilde{\omega}$ нарушается соотношение (24), т.е. выполнено неравенство $\frac{\tilde{q}_1(T)}{h_1} = exp(\lambda^{\tilde{\omega}}) < \frac{q_j^0}{h_j}$.

Далее будем рассматривать функции $\frac{q_1(T,\ \tau_1)}{h_1}$ и $\frac{q_j(T,\ \tau_1)}{h_j}$ при фиксированном значении T в зависимости от переменного параметра τ_1. Справедливы следующие равенства: $\frac{q_1(T,\ T)}{h_1} = \frac{q_1(T)}{h_1}$; $\frac{q_1(T,\ 0)}{h_1} = \frac{q_1^0}{h_1}$; $\frac{q_j(T,\ T)}{h_j} = \frac{q_j^0}{h_j}$. Рассмотрим разницу функций:

$$F_1(T,\ \tau_1) = \frac{q_1(T,\ \tau_1)}{h_1} - \frac{q_j(T,\ \tau_1)}{h_j} = \frac{q_1^0}{h_1}\exp\left[-\frac{\alpha_1^0\bar{v}\tau_1(2T-\tau_1)}{2h_1}\right] - \frac{q_j^0}{h_j}\exp\left[-\alpha_j^0\bar{v}\frac{(T-\tau_1)^2}{2h_j}\right].$$

Приходим к соотношениям: $F_1(T,\ 0) = \frac{q_1^0}{h_1} - \frac{q_j^0}{h_j}\exp\left[-\alpha_j^0\bar{v}\frac{T^2}{2h_j}\right] > 0$; $F_1(T,\ T) = \frac{q_1(T)}{h_1} - \frac{q_j^0}{h_j} < 0$;

$$F'_{1\tau_1}(T,\ \tau_1) = -\bar{v}(T-\tau_1)[\frac{q_1(T,\ \tau_1)}{h_1} + \frac{q_j(T,\ \tau_1)}{h_j}] < 0. \quad (26)$$

Значит, существует такое $\tau_1' \in (0,T)$, при котором выполняется равенство (25). Следовательно, $|\tilde{\omega}|=2$. Увеличивается $\lambda^{\tilde{\omega}}$ и значение функции (23), что противоречит условиям теоремы 1. Пришли к противоречию.

В случаях $|\tilde{\omega}|>1$ используется тот же подход и те же доказательства, который мы применяли для $|\tilde{\omega}|=1$.

3) Докажем единственность оптимального подмножества $\tilde{\omega}$. Рассмотрим два подмножества $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$, при которых выполняется неравенство $|\tilde{\omega}|<|\tilde{\omega}'|$, и элемент $j \notin \tilde{\omega}$ и $j \in \tilde{\omega}'$. В соответствии с предыдущим пунктом мы получаем два противоречивых неравенства: $\frac{\tilde{q}_i(T)}{h_i} > \frac{q_j^0}{h_j}$ и $\frac{\tilde{q}_i(T)}{h_i} < \frac{q_j^0}{h_j}$, $i \in \tilde{\omega}$, $j \in \Omega/\tilde{\omega}$. Теорема доказана

Теорема 1 также справедлива для других порядков нумерации месторождений.

4) Для дальнейшего исследования нам будут полезны следующие обозначения:

$$a_i = \ln\left(\frac{q_i^0}{h_i}\right);\ \kappa = \int_0^T (T-t)\bar{v}dt = \frac{1}{2}\bar{v}T^2;\ \mu_i = \frac{\alpha_i^0}{h_i}\int_0^T (T-t)\tilde{v}_i(t)dt. \quad (27)$$

Мы решаем задачу на максимум. С теоретической точки зрения нам интересно решение этой задачи на минимум. Однако с практической точки зрения она не представляет интерес. Решение задачи на минимум достаточно простое: разбуривается только одно месторождение, имеющее наименьшее значение $a_i = \ln\left(\frac{q_i^0}{h_i}\right)$.

Будем считать, что месторождения пронумерованы в порядке убывания значений a_i и все a_i различны. Это не означает, что разбуриваться будут месторождения в том же порядке. При доказательстве следующей теоремы мы не заостряем внимания на конкретной последовательности ввода в разработку месторождений. Результаты теоремы 2 относятся одновременно ко всем последовательностям и являются общими для всех порядков бурения месторождений.

Теорема 2. *Решение задачи 1 в общем случае не однозначно. Множество Ω разбивается на два непересекающихся подмножества, одно из которых может быть пустым. Такое разбиение существует, и оно задается единственным натуральным числом* $\tilde{l}$ $(1 \le \tilde{l} \le m)$:

а) для i, $1 \le i \le \tilde{l}$ *значения* $\tilde{v}_i(t)$ не определены; выполняются только неравенства $\int_0^T \tilde{v}_i(t)dt \ge 0$; нам известны их интегральные соотношения:

$$\mu_i = \frac{\alpha_i^0}{h_i}\int_0^T (T-t)\tilde{v}_i(t)dt = \left(\sum_{k=1}^{\tilde{l}} \frac{h_k}{\alpha_k^0}\right)^{-1}\left[\kappa + \sum_{k=1}^{\tilde{l}} \frac{h_k}{\alpha_k^0}(a_i - a_k)\right] \ge 0; \tag{28}$$

б) *для j,* $\tilde{l} \le j \le m$, $\tilde{v}_i(t) \equiv 0$ *и*

$$\kappa + \sum_{k=1}^{\tilde{l}} \frac{h_k}{\alpha_k^0}(a_i - a_k) < 0. \tag{29}$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого подмножества ω множества Ω справедливо соотношение (24). Из (6), (11), (24), (27) вытекает $\tilde{v}_j(t) \equiv 0$ для $j \in \Omega/\omega$, т.е. $\mu_j = 0$. Очевидно, что $\mu_i \ge 0$, $i \in \omega$. Используя (11) и (27), мы получаем

$$\sum_{i\in\omega} \frac{h_i}{\alpha_i^0}\mu_i = \kappa. \tag{30}$$

Из (13) получаем

$$\tilde{q}_i(T) = q_i^0 \exp(-\mu_i) = h_i \exp(a_i - \mu_i)\,,\ i \in \omega. \tag{31}$$

Откуда

$$\mu_i = a_i - \ln\left(\frac{\tilde{q}_i(T)}{h_i}\right) = a_i - \lambda^\omega. \tag{32}$$

Наконец, из (30) и (32) следует

$$\lambda^\omega = \left(\sum_{i\in\omega} \frac{h_i}{\alpha_i^0}\right)^{-1}\left(\sum_{i\in\omega} \frac{h_i}{\alpha_i^0} a_i - \kappa\right). \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получаем формулу для определения

$$\mu_i = \left(\sum_{k\in\omega} \frac{h_k}{\alpha_k^0}\right)^{-1}\left[\sum_{k\in\omega} \frac{h_k}{\alpha_k^0}(a_i - a_k) + \kappa\right]. \tag{34}$$

5) Выясним, какими свойствами обладает $\omega = \tilde{\omega}$, доставляющее максимальное решение. Введем в рассмотрение величины

$$\nu_i^\omega \equiv a_i - \lambda^\omega, \tag{35}$$

которые будем формально вычислять для всех $i \in \Omega$. Заметим, что $\nu_i^\omega = \mu_i$ для $i \in \omega$. Из определения (35) следует

$$\nu_s^\omega - \nu_\eta^\omega = a_s - a_\eta$$

и эта разность не зависит от ω, т.е. числа ν_s^ω образуют убывающую последовательность при любом ω.

Пусть для некоторого элемента $j_1 \in \Omega/\tilde{\omega}$ выполнено нестрогое неравенство $\nu_{j_1}^{\tilde{\omega}} \ge 0$.

Из (31), (32), (35) вытекает неравенство $\frac{\tilde{q}_{j_1}(T)}{h_{j_1}} = \frac{q_{j_1}^0}{h_{j_1}} = exp(a_{j_1}) \ge exp(\lambda^{\tilde{\omega}})$, которое противоречит доказанному утверждению (24), следовательно

$$\nu_j^{\tilde{\omega}} < 0,\ j \in \Omega/\tilde{\omega}. \tag{36}$$

Пусть для некоторого элемента $i_1 \in \tilde{\omega}$ $\nu_{i_1}^{\tilde{\omega}} < 0$. Это предположение противоречит условию (6) и поэтому

$$\nu_i^{\tilde{\omega}} \geq 0,\ i \in \tilde{\omega}. \tag{37}$$

Свойства (36), (37) означает, что $\tilde{\omega}$ состоит из некоторого количества $\tilde{l}$ (пока еще неизвестного) первых по порядку номеров из множества Ω и позволяют записать соотношения (34), (36) и (37) в форме (28), (29). Далее будем рассматривать подмножества ω только такого вида.

6) Проанализируем изменения величин ν_i^{ω}, происходящее при переходе от $\omega' \equiv \{1, 2, \dots, (l-1)\}$ к $\omega'' \equiv \{1, 2, \dots, l\}$. Из (33) и (35) получаем

$$\nu_i^{\omega''} = \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{h_k}{\alpha_k^0}\right)^{-1} \left[\sum_{k=1}^{l-1} \frac{h_k}{\alpha_k^0} \nu_i^{\omega'} + (a_i - a_l)\frac{h_l}{\alpha_l^0}\right]. \tag{38}$$

Откуда следует, что для $i \in \omega''$ неравенство $\nu_i^{\omega'} \geq 0$ влечет за собой $\nu_i^{\omega''} \geq 0$, а неравенство $\nu_i^{\omega''} < 0 - \nu_i^{\omega'} < 0$. Положив в формуле (38) $i=l$, получим, что значения $\nu_i^{\omega'}$ и $\nu_i^{\omega''}$ отрицательны или неотрицательны при любом значении l.

7) Для того, чтобы доказать, что максимум совокупной накопленной добычи газа может достигаться при любой последовательности ввода в разработку месторождений, с учетом (4) преобразуем интеграл (19):

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{m} Q_i(t)dt = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i^0} \int_0^T [-\dot{q}(t)]dt = \sum_{i=1}^{m} V_i^0 \left[1 - \frac{q_i(T)}{q_i^0}\right]. \tag{39}$$

Как следует из (13), из утверждения (24) и конкретного числового значения (33) величины $q_i(T)$ при $i \in \omega$ имеют одни и те же значения для всех возможных видов управлений, удовлетворяющих условиям (28). Для $j \in \Omega/\omega\ \tilde{v}_j(t) \equiv 0$, следовательно $\tilde{q}_j(T)$ также определяются однозначно.

Так как максимум задачи 1 существует и все последовательности, удовлетворяющие условиям (28), доставляют функционалу (19) одно и то же значение, мы можем заключить, что эти и только эти управления являются оптимальными. Теорема доказана.

8) Обозначим через $d(\omega)$ количество неотрицательных чисел среди величин ν_i^{ω}. Из (38) следует, что $d(\omega)$ есть неубывающая функция от $|\omega|$ (т.е. количество элементов в подмножестве ω). Установленные выше свойства (36) и (37) можно записать в виде:

$\tilde{l} = |\tilde{\omega}| = d(\omega) = \tilde{d}$.

Далее рассмотрим вопрос об отыскании подмножества $\tilde{\omega}$. Если $d(\Omega) = m$ или $d(\{1\})=1$, то вопрос об отыскании $\tilde{\omega}$ решен, $\tilde{\omega}$ есть Ω или $\{1\}$, соответственно; если же ни одно из двух равенств не выполняется, то можно предложить следующую итерационную процедуру.

Находим ω_1 такое, что $|\omega_1|=d(\Omega)$. Если $d(\omega_1)<d(\Omega)$, то находим такое ω_2, что $|\omega_2|=d(\omega_1)$ и т. д. до тех пор, пока не придем к значению $\tilde{\omega} = \omega_n$, обладающему свойством $d(\omega_n)=d(\omega_{n-1})$. "Проскочить" $\tilde{\omega}$ мы не сможем, так как если бы существовали такие ω_s и ω_{s+1}, что

$d(\omega_{s+1}) > |\omega_{s+1}| = l = d(\omega_s) < |\omega_s|$,

то из левого и правого неравенства вытекали бы взаимоисключающие следствия $\nu_{l+1}^{\omega_s} \geq 0$ и $\nu_{l+1}^{\omega_s} < 0$.

Можно начинать не с Ω, а с $\{1\}$, затем перейти к подмножеству ω_1 такому, что $|\omega_1|=d(\{1\})$ и. т.д. пока в конце концом не придем к тому же $\tilde{\omega}$.

Описанная процедура, представляет собой, в некотором роде, аналог метода Ньютона. Можно предложить и другую процедуру, аналогичную методу половинного деления. Пусть $d(\{1\})>1$ и $d(\Omega)<m$. Положим $|\omega_1| = \left[\frac{m+1}{2}\right]$.

Если $d(\omega_1) < \left[\frac{m+1}{2}\right]$, то можно заключить, что $1 < \tilde{l} < \left[\frac{m+1}{2}\right]$, если же $d(\omega_1) > \left[\frac{m+1}{2}\right]$, то $\left[\frac{m+1}{2}\right] < \tilde{l} < m, |\omega_2| = \left[\frac{|\omega_1|+1}{2}\right]$ и т. д.

9) Представляет интерес исследовать некоторые предельные случаи рассматриваемой задачи, описание которых дается в следующих следствиях.

Следствие 1. *Существует T^*, такое, что $\tilde{\omega} = \{1\}$ при $T < T^*$, т.е. при достаточно малом периоде планирования осваивается лишь одно первое месторождение.*

Это утверждение вытекает из непрерывности $\nu_i^{\{1\}}(T)$, как функции T и того факта, что

$\lim_{T\to 0} \nu_i^{\{1\}}(T) = \ln\frac{q_i^9}{h_i} - \ln\frac{q_1^9}{h_1} \equiv \nu_i^{\{1\}}(0) < 0$ при i> 1.

Подчеркиваем, что в этом случае решение становится однозначным $\tilde{v}_1(t) = \bar{v}, \tilde{v}_i(t) \equiv 0, i \neq 1$.

Следствие 2. *Существует T^{**}, такое, что $\widetilde{\omega} = \Omega$ при $T > T^{**}$, т.е. при достаточно большом периоде планирования осваиваются все месторождения.*

Предположим, что $|\widetilde{\omega}|$=1 и

$$\frac{\tilde{q}_1(T)}{h_1} > \frac{\tilde{q}_j(T)}{h_j} = \frac{q_j^0}{h_j}, j \in \Omega/\widetilde{\omega}. \tag{40}$$

В таком случае из (24) следует, что $\tau_1 = T$, остальные τ_j=0, j=2, …, m. Это означает, что разбуривается только лишь одно первое месторождение со скоростью $\tilde{v}(t) = \bar{v}$ при $t \in [0, T]$. Легко показать, что для достаточно большого периода планирования [0, T] такое управление не будет оптимальным. Действительно, пусть T таково, что для некоторого j выполняется неравенство:

$$a_1 - a_j = \ln\left(\frac{q_1^0 h_j}{q_j^0 h_1}\right) < \frac{\alpha_1^0 \bar{v} T^2}{2h_1}.$$

Отсюда и из равенств (4), (12) следует:

$$\frac{\tilde{q}_1(T)}{h_1} = \frac{q_1^0}{h_1}\exp\left[-\alpha_1^0 \int_0^T (T-t)\frac{\bar{v}}{h_1}dt\right] = \frac{q_1^0}{h_1}\exp\left[-\alpha_1^0 \frac{\bar{v}T^2}{2h_1}\right] < \frac{q_j^0}{h_j} = \frac{\tilde{q}_j(T)}{h_j},$$

что противоречит допущению (40).

2. Заключение

Обустройство месторождения требует больших капитальных вложений в бурение и строительство скважин. Данные работы на месторождении выполняются в течении относительно небольшого периода времени. Осуществляет их буровое предприятие при значительном ежегодном внешнем финансировании. Поэтому буровому предприятию целесообразно в соответствии с проектом разработки сконцентрировать все имеющиеся возможности как финансовые, так и технологические на выполнение работ на одном месторождении. По завершении их передать юридические и другие права эксплуатационному предприятию и перейти к разбуриванию следующего по порядку месторождения.

Возникает вопрос о выборе последовательности разбуривания месторождений. Оказывается, чтобы просмотреть незначительное количество месторождений, требуется большое число переборов. В работе была выведена формула для вычисления количества переборов. Например, для просмотра всех 15 месторождений потребуется перебрать более 3,5 триллионов вариантов. Также для каждого варианта необходимо решить задачу согласно выбранному оптимизационному максимизационного ерию. Перебор такого большого количества вариантов представляет определенную сложность для современных вычислительных машин.Возникшую трудность можно преодолеть, решив оптимизационную задачу, и на основе полученных аналитических результатов построить вычислительный процесс поиска оптимизационного решения.

Исходная задача состоит в поиске максимальной накопленной добычи на конечном временном периоде для группы газовых месторождений при ежегодных ограничениях на капиталовложения. Разбуривание месторождений осуществляется последовательно. Предприятие к работам на ранее разбуренных месторождениях не возвращается.

При анализе решения исходной задачи выяснилось, что в общем случае множество месторождений состоит из двух подмножеств. Одно подмножество месторождений подвергается разбуриванию и оно состоит из не менее одного месторождения. Другое подмножество может быть пустым. Месторождения из этого подмножества остаются не тронутыми, исключаются из разработок и выводятся в резерв. Более того, оптимальное решение не зависит от последовательности разбуривания месторождений. Для всех последовательностей оно приводит к одинаковому значению максимизационного критерия. Полученная неоднозначность решения оптимизационной проблемы может быть использована для выбора конкретного варианта, исходя из другого не обязательно формализованного критерия.

Предложены две процедуры поиска единственного подмножества разрабатываемых месторождений. Показано, что при небольших периодах планирования разрабатывается только одно месторождение даже с плохими технико-экономическими характеристиками. При больших периодах планирования разбуривается вся группа газовых месторождений.

Литература

1. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П., Кабанов Н.И.* Теория и опыт добычи газа. – М.: Недра, 1998. – 480 с.
2. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В. и др.* Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение. / Под ред. В.Р. Хачатурова. – М.: УРСС:ЛЕНАНД, 2015. – 304 с.
3. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. – М.: Недра, 1992. – 288 с.
4. Skiba A.K. Dynamic model analysis of gas deposit developments. // Large-Scale System Development (MLSD): Proceedings of the Eleventh International Conference. IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. – 2019. – P. 619-622.
5. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. // Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018): Communications in Computer and Information Science, Springer. – 2019. Vol. 974. – P. 453-469.
6. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
7. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту. // Матем. экономика. – М.: Мир, 1974. – С. 7-45.