DOI: 10.25728/mlsd.2023.0502

КОМБИНИРОВАННЫЕ ОПТИМУМЫ

Мохонько Е.З.
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
ezmokhon@mail.ru

Аннотация. Один игрок выбирает комбинированный оптимум потому, что отклонение от оптимума не увеличивает его выигрыш. Другой игрок не отклоняется от оптимума потому, что отклонение от оптимума не увеличивает выигрыш партнера. Даны определения комбинированных оптимумов. Найдены достаточные условия их существования.

Ключевые слова: равновесия по Нэшу и Бержу, повторяющаяся игра, стратегии с памятью.

Введение

В теории игр вопрос формулировки принципа оптимальности, подходящего для конкретной модели принятия решений, и его исследование является одним из основных [1], [2]. По мере развития теории игр рассматриваются все более сложные конфликты, строятся их модели, определяется, что считать решением конфликтов. Для новых моделей конфликтов либо формулируют новые принципы оптимальности [3], либо приспосабливают уже существующие принципы оптимальности к новым моделям. Например, широко известно равновесие по Нэшу для конечной одношаговой игры в стратегической форме. Для повторяющейся игры с непрерывным временем идея этого равновесия была использована в [4]. Для неантагонистической дифференциальной игры – в [5].

Для одношаговой игры формулировка равновесия по Бержу приводится во многих работах, например, в [6], [7]. Можно сказать, что игрок, отклоняющийся от равновесия по Нэшу, интересуется тем, как уменьшается его собственный выигрыш. Игрок, отклоняющийся от равновесия по Бержу, интересуется, как уменьшается выигрыш партнера.

В данной работе рассматривается непрерывно повторяющаяся игра двух лиц с использованием стратегий с памятью [4]. Если первый игрок использует идеологию равновесия по Бержу, а второй – равновесия по Нэшу, то решением конфликта является комбинированное Берж – Нэш равновесие. Если первый игрок использует идеологию равновесия по Нэшу, а второй – по Бержу, то решением конфликта является комбинированное Нэш – Берж равновесие. Дается определение этих равновесий в непрерывно повторяющейся игре, в которой игроки используют стратегии с памятью. Найдены достаточные условия существования этих равновесий. Рассмотрен пример.

Раннее комбинированные Берж – Нэш, Нэш – Берж равновесия в повторяющейся игре не рассматривались, достаточные условия их существования не определялись.

Цель данной работы определение и углубленное исследование этих комбинированных оптимумов в одном из видов динамических игр.

1. Повторяющаяся игра

Рассмотрим игру двух лиц с непрерывным временем, проистекающую на отрезке $[0,1]$. Множества выборов игроков $. X_i^t ., i=1,2$, описываются измеримыми функциями $x_i(t):[0,1]\to X_i$. X_i – замкнутые, ограниченные множества.

Функции выигрыша игроков описываются равенствами

$$F_1(x_1,x_2)=\int_0^1 M_1(x(t))dt, F_2(x_1,x_2)=\int_0^1 M_2(x(t))dt,$$

$x(t)=(x_1,x_2)\in X=X_1\times X_2$, M_i непрерывны.

Игроки стремятся максимизировать свои выигрыши.

Используются стратегии с памятью

$$x_1'=\varphi_1(x_2(.,t),t),\ x_2'=\varphi_2(x_1(.,t),t),\ t\in[0,1],\ (x_1',x_2')\in X.$$

По определению при $t=0$ положим $\phi_i=x_i$,. $x_i(.,t)=\{x_i(\tau),0\le\tau<t\}$, $i=1,2$.

Содержательно эти стратегии означают, что в любой момент времени t известно о поведении партнера на интервале $[0,t)$.

Обозначим

$$F_i(\varphi)=F_i(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^1 M_i\big(\varphi_1(x_2(.,t),t),\varphi_2(x_1(.,t),t)\big)dt .$$

Будем говорить, что стратегии $\varphi^0=\left(\varphi_1^0,\varphi_2^0\right)$ образуют ситуацию равновесия по Нэшу, если $F_1\left(\varphi^0\right)\geq F_1\left(\varphi_1,\varphi_2^0\right), F_2\left(\varphi^0\right)\geq F_2\left(\varphi_1^0,\varphi_2\right)\forall\varphi_i, i=1,2$. В [4], если такие неравенства выполняются, говорится, что просто образуется ситуация равновесия. Нэш не упоминается, хотя эти неравенства являются адаптацией равновесия по Нэшу в одношаговой игре к динамической игре. Мы же будем говорить «равновесие по Нэшу в непрерывно повторяющейся игре».

В [4] показано, что стратегии

$$\varphi_1^0(x_2(.,t),t)=\begin{cases} x_1^0, x_2(.,t)\equiv x_2^0 \\ x_1^n\in Arg\min\limits_{x_1\in X_1}\max\limits_{x_2\in X_2} M_2(x_1,x_2), x_2(.,t)\neq x_2^0\end{cases},$$

$$\varphi_2^0(x_1(.,t),t)=\begin{cases} x_2^0, x_1(.,t)\equiv x_1^0, \\ x_2^n\in Arg\min\limits_{x_2\in X_2}\max\limits_{x_1\in X_1} M_1(x_1,x_2), x_1(.,t)\neq x_1^0,\end{cases}$$

образуют ситуацию равновесия по Нэшу, если $x^0=\left(x_1^0,x_2^0\right)\in\bar{D}$,

$$\bar{D}=\left\{x\in X\mid M_1(x)\geq\min_{x_2}\max_{x_1}M_1(x)=L_1, M_2(x)\geq\min_{x_1}\max_{x_2}M_2(x)=L_2\right\} .$$

Скажем, что стратегии $\varphi^0=\left(\varphi_1^0,\varphi_2^0\right)$ образуют ситуацию равновесия по Бержу, если

$$F_1\left(\varphi^0\right)\geq F_1\left(\varphi_1^0,\varphi_2\right), F_2\left(\varphi^0\right)\geq F_2\left(\varphi_1,\varphi_2^0\right)\forall\varphi_i, i=1,2 .$$

Обозначим

$$D^B=\left\{x\in X\mid M_1(x)>\min_{x_1}\max_{x_2}M_1(x)=L_1^b, M_2(x)>\min_{x_2}\max_{x_1}M_2(x)=L_2^b\right\},$$

$$\bar{D}^B=\left\{x\in X\mid M_1(x)\geq\min_{x_1}\max_{x_2}M_1(x)=L_1^b, M_2(x)\geq\min_{x_2}\max_{x_1}M_2(x)=L_2^b\right\} .$$

В [8] показано, что если множество $\bar{D}^B\neq\varnothing$, то стратегии вида

$$\varphi_1(x_2(.,t),t)=\begin{cases} x_1^0, x_2(.,t)\equiv x_2^0 \\ x_1^n\in Arg\min\limits_{x_1\in X_1}\max\limits_{x_2\in X_2} M_1(x_1,x_2), x_2(.,t)\neq x_2^0\end{cases},$$

$$\varphi_2(x_1(.,t),t)=\begin{cases} x_2^0, x_1(.,t)\equiv x_1^0, \\ x_2^n\in Arg\min\limits_{x_2\in X_2}\max\limits_{x_1\in X_1} M_2(x_1,x_2), x_1(.,t)\neq x_1^0,\end{cases}$$

где $x^0=\left(x_1^0,x_2^0\right)\in\bar{D}^B$, образуют ситуацию равновесия по Бержу.

Действительно, пусть t_1 – время начала отклонения игрока 1 от выбора x_1^0, то есть $x_1=x_1^0$ при $t\in[0,t_1)$. Тогда выигрыш второго игрока оценивается следующим неравенством

$$F_2\left(\varphi_1,\varphi_2^0\right)\leq\int_0^{t_1}M_2\left(x^0\right)dt+\int_{t_1}^1\max_{x_1}M_2\left(x_1,x_2^n\right)dt=M_2\left(x^0\right)t_1+L_2^b(1-t_1)\leq$$
$$M_2\left(x^0\right)t_1+M_2\left(x^0\right)(1-t_1)=M_2\left(x^0\right)=F_2\left(\varphi^0\right).$$

Нарушение первым игроком в момент t_1 соглашения о выборе x_1^0 приводит второго игрока к уменьшению его выигрыша. Что и требовалось доказать.

Определение.

Скажем, что $\varphi^0=\left(\varphi_1^0,\varphi_2^0\right)$ является комбинированным Берж – Нэш оптимумом, если

$F_2\left(\varphi^0\right)\ge F_2\left(\varphi_1,\varphi_2^0\right)\forall\varphi_1$, $F_2\left(\varphi^0\right)\ge F_2\left(\varphi_1^0,\varphi_2\right)\forall\varphi_2$.

Стратегии

$$\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right)=\begin{cases} x_2^0, x_1(.,t)\equiv x_1^0,\\ x_2^n\in Arg\min\limits_{x_2\in X_2}\max\limits_{x_1\in X_1} M_2\left(x_1,x_2\right), x_1(.,t)\ne x_1^0,\end{cases}$$

$$\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right)=\begin{cases} x_1^0, x_2(.,t)\equiv x_2^0,\\ x_1^n\in Arg\min\limits_{x_1\in X_1}\max\limits_{x_2\in X_2} M_2\left(x_1,x_2\right), x_2(.,t)\ne x_2^0,\end{cases},$$

$x^0=\left(x_1^0,x_2^0\right)\in\{\left(x_1,x_2\right)\mid M_2\left(x\right)\ge\min\limits_{x_1}\max\limits_{x_2}M_2\left(x\right)=L_2, M_2\left(x\right)\ge\min\limits_{x_2}\max\limits_{x_1}M_2\left(x\right)=L_2^b\}$ являются комбинированным Берж – Нэш оптимумом.

Обозначим

$$D_2=\{\left(x_1,x_2\right)\mid M_2\left(x\right)\ge\min_{x_1}\max_{x_2}M_2\left(x\right)=L_2\},$$

$$D_2^B=\{\left(x_1,x_2\right)\mid M_2\left(x\right)\ge\min_{x_2}\max_{x_1}M_2\left(x\right)=L_2^b\}.$$

Не пустота пересечения $D_2\cap D_2^B\ne\varnothing$ является достаточным условием существования Берж – Нэш оптимума.

Определение.

Скажем, что $\varphi^0=\left(\varphi_1^0,\varphi_2^0\right)$ является комбинированным Нэш – Берж оптимумом, если

$$F_1\left(\varphi^0\right)\ge F_1\left(\varphi_1,\varphi_2^0\right)\forall\varphi_1,\ F_1\left(\varphi^0\right)\ge F_1\left(\varphi_1^0,\varphi_2\right)\forall\varphi_2.$$

Стратегии

$$\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right)=\begin{cases} x_2^0, x_1(.,t)\equiv x_1^0,\\ x_2^n\in Arg\min\limits_{x_2\in X_2}\max\limits_{x_1\in X_1} M_1\left(x_1,x_2\right), x_1(.,t)\ne x_1^0,\end{cases}$$

$$\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right)=\begin{cases} x_1^0, x_2(.,t)\equiv x_2^0,\\ x_1^n\in Arg\min\limits_{x_1\in X_1}\max\limits_{x_2\in X_2} M_1\left(x_1,x_2\right), x_2(.,t)\ne x_2^0,\end{cases}$$

$x^0=\left(x_1^0,x_2^0\right)\in\{\left(x_1,x_2\right)\mid M_1\left(x\right)\ge\min\limits_{x_2}\max\limits_{x_1}M_1\left(x\right)=L_1, M_1\left(x\right)\ge\min\limits_{x_1}\max\limits_{x_2}M_1\left(x\right)=L_1^b\}$ являются комбинированным Нэш – Берж оптимумом.

Обозначим

$$D_1=\{\left(x_1,x_2\right)\mid M_1\left(x\right)\ge\min_{x_2}\max_{x_1}M_1\left(x\right)=L_1\},$$

$$D_1^B=\{\left(x_1,x_2\right)\mid M_1\left(x\right)\ge\min_{x_1}\max_{x_2}M_1\left(x\right)=L_1^b\}.$$

Не пустота пересечения $D_1\cap D_1^B\ne\varnothing$ является достаточным условием существования Нэш – Берж оптимума.

Пример. $F_1(x_1,x_2)=\int\limits_0^1(x_1-\frac{1}{2}x_2)dt$,

$$F_2(x_1,x_2)=\int\limits_0^1(x_2-\frac{1}{2}x_1)dt,$$

$$0\le t\le 1,\ 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1,$$

$$L_1^b = \min_{x_1}\max_{x_2} M_1(x) = 0\,,\; L_2^b = \min_{x_2}\max_{x_1} M_2(x) = 0\,,$$

$$L_1 = \min_{x_2}\max_{x_1} M_1(x) = \min_{x_2}\max_{x_1}(x_1 - \frac{1}{2}x_2) = \frac{1}{2}\,,$$

$$L_2 = \min_{x_1}\max_{x_2} M_2(x) = \min_{x_1}\max_{x_2}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1\right) = \frac{1}{2}\,.$$

$$x_1^0 = 1, x_2^0 = 1\,.$$

$$D^B = \left\{x \in X \mid M_1(x) > 0, M_2(x) > 0\right\}.$$

$$x^0 = (1{,}1) \in D^B, \text{ так как } F_1(1{,}1) = \frac{1}{2}, F_2(1{,}1) = \frac{1}{2}\,.$$

$$x^0 = (1{,}1) \in \bar{D}\,,\; \bar{D} = \left\{x \in X \mid M_1(x) \ge \frac{1}{2}, M_2(x) \ge \frac{1}{2}\right\}.$$

Стратегии вида

$$\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_2(.,t) \equiv 1 \\ 0, x_2(.,t) \ne 1 \end{cases},$$

$$\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_1(.,t) \equiv 1 \\ 0, x_1(.,t) \ne 1 \end{cases}$$

образуют ситуацию равновесия по Бержу.

$$\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_2(.,t) \equiv 1 \\ 1, x_2(.,t) \ne 1 \end{cases},$$

$$\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_1(.,t) \equiv 1 \\ 1, x_1(.,t) \ne 1 \end{cases}$$

образуют ситуацию равновесия по Нэшу.

Точка $x_1^0 = 1, x_2^0 = 1$ является основой комбинированного Берж – Нэш оптимума.

$(1{,}1) \in \bar{D}, (1{,}1) \in \bar{D}^B$.

$$\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_1(.,t) \equiv 1, \\ 0, x_1(.,t) \ne 1, \end{cases},$$

$$\varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_2(.,t) \equiv 1, \\ 1, x_2(.,t) \ne 1, \end{cases}$$

образуют Берж – Нэш оптимум.

Точка $x_1^0 = 1, x_2^0 = 1$ является также основой комбинированного Нэш – Берж оптимума.

$$\varphi_2^0\left(x_1(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_1(.,t) \equiv 1, \\ 1, x_1(.,t) \ne 1, \end{cases},\; \varphi_1^0\left(x_2(.,t),t\right) = \begin{cases} 1, x_2(.,t) \equiv 1, \\ 0, x_2(.,t) \ne 1, \end{cases}$$

образуют Нэш – Берж оптимум.

2. Заключение

В данной работе в непрерывно повторяющейся игре двух лиц с использованием игроками стратегий с памятью дано определение комбинированных Берж – Нэш и Нэш – Берж равновесий и определены достаточные условия их существования.

В комбинированном Берж – Нэш равновесии первый игрок заинтересован в том, чтобы своими действиями не ухудшить выигрыш партнера, а второй игрок хочет не уменьшить свой выигрыш. В комбинированном Нэш – Берж равновесии первый игрок отказывается от действий, которые приводят его к тому же выигрышу, который он имеет в комбинированном Нэш – Берж равновесии или уменьшают его. Второй игрок отказывается от действий, которые не увеличивают выигрыш партнера, по сравнению с выигрышем, который партнер имеет в Нэш – Берж равновесии.

Подготовлена почва для исследования оптимальных режимов получения информации в случаях, когда игроки используют одно из этих комбинированных равновесий с использованием идей из [9].

Непрерывно повторяющиеся игры двух лиц с использованием игроками стратегий с памятью [4] перспективны. Они используют простой математический аппарат. Их удобно применять в тех случаях, когда динамика исследуемого конфликта не сложная.

В перспективе было бы интересно провести такого рода исследования для игры, в которой игроков больше двух.

Литература

1. *Воробьёв Н.Н.* Игр теория // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – С. 469–475.
2. *Воробьёв Н.Н.* Оптимальности принцип // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – Т. 4. – С. 54.
3. *Захаров В.В*. Оптимальное поведение в иерархических системах: дис. докт. физ.-матем. наук. – Л.: ЛГУ, 1989. – 320 с.
4. *Кононенко А.Ф.* Постановка задачи. Модель с непрерывным временем // Современное состояние теории исследования операций. Сборник научных трудов. – М.: Наука, 1979. – С. 173–179.
5. *Кононенко А.Ф.* Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. – Т.20. – №5. – С. 1105–1116.
6. *Кузютин Д.В.* Устойчивость решений в позиционных играх. Методические указания – Санкт-Петербург: СПбГУ, 1995. – 40 с.
7. *Жуковская Л.В.* Сбалансированность экономической, правовой и социальной макросистем на основе моделирования процессов принятия решений: дис. докт. экон. наук. – М.: ЦЭМИ, 2020. – 277 с.
8. *Мохонько Е.З.* Равновесие по Бержу в непрерывно повторяющейся игре двух лиц // Труды XX Межд. науч.-практич. конференции «Теория и практика экономики и предпринимательства. Симферополь – Гурзуф. 20–22 апреля 2023 года» – Симферополь: Издат. дом КФУ, 2023. – С. 75–79.
9. *Кононенко А.Ф.* О задаче наблюдения в повторяющихся операциях // Современное состояние теории исследования операций. Сборник научных трудов. – М.: Наука, 1979. – С. 179–182.