DOI: 10.25728/mlsd.2023.0456

УСТОЙЧИВОСТЬ В ИГРАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ФАКТОРАМИ

Горелов М.А.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

griefer@ccas.ru

Аннотация. Найден максимальный гарантированный результат в одной иерархической игре с неопределенным фактором на классе стратегий с обратной связью. Исследована устойчивость рассматриваемой задачи по отношению к возмущениям функции выигрыша игрока нижнего уровня. Получены регуляризирующие оценки.

Ключевые слова: иерархические игры с неопределенными факторами, максимальный гарантированный результат, устойчивость.

Введение

Название работы требует пояснения. К сожалению, термин «устойчивость» перегружен различными смыслами. Далее под устойчивостью будет пониматься непрерывная зависимость решения задачи от параметров исследуемой модели.

Важность устойчивости при решении практических задач вряд ли может вызывать сомнения. И наверняка с проблемами неустойчивости, так или иначе, сталкивались давно. Но до поры до времени их молчаливо обходили. Показательно, что Дж. фон Нейман, который помимо прочего, был одним из крупнейших специалистов по теории множеств, ограничился рассмотрением лишь конечных игр и их смешанных расширений [1]. Попытки обобщить конструкции позиционных игр фон Неймана на случай бесконечных множеств немедленно приводят к классам моделей, в которых неустойчивость является типичным явлением.

В какой-то момент стало ясно, что устойчивость требует особого исследования (впервые проблема была явно выделена в связи с задачами математической физики). Ж. Адамар включил устойчивость, наряду с существованием и единственностью решения, в понятие корректно поставленной задачи [2]. Но довольно долгое время считалось, что практический смысл имеют только корректно поставленные задачи [3].

Позднее стало понятно, что некорректные задачи тоже могут быть полезны. Это привело к созданию особой теории некорректных задач [4], которую часто связывают с именем А.Н. Тихонова. Особую актуальность эта теория приобрела в связи с использованием компьютеров и численных методов при решении самых разных задач.

В книге [4] и многих других работах (например, [5,6]) устойчивость понимается в духе классического анализа. Следующий шаг от простоты к реалистичности был сделан в [7]. Образно говоря, новизна сводилась к тому, что в классической фразе «для любого ε существует такое δ, что…» вместо утверждения о существовании требовалось указать конкретное условие на величину δ, при котором выполняется условие, обозначенное многоточием. В результате это приводит к переходу от бесконечно малых возмущений параметров модели к конечным возмущениям, величина которых определяется особенностью моделируемой системы. Аналогичные модели ранее привели к созданию конструктивного математического анализа [8].

Неустойчивые модели встречаются в разных областях науки. Но в теории игр исследование устойчивости занимает, пожалуй, особое место. Дело в том, что в других областях чаще всего исследуют классы моделей, в которых неустойчивые задачи являются в определенном смысле исключительными. В теории игр нередко приходится сталкиваться с классами моделей, в которых неустойчивость достаточно типична. Иногда это свидетельствует о неудачно выбранном способе формализации, а иногда отражает существо дела [9].

Далее будет исследована задача вычисления максимального гарантированного результата игрока верхнего уровня в иерархической игре двух лиц при наличии внешнего неопределенного фактора. Исследование проводится с точки зрения игрока верхнего уровня. При этом естественно предположить, что интересы партнера известны этому игроку не совсем точно. Можно было бы предположить, что имеется и неопределенность в информации о множестве управлений игрока нижнего уровня и множестве значений неопределенного фактора. Это приводит к удлинению формул, но мало что меняет по существу.

В работе используется несколько необычный способ формального описания моделируемого конфликта. Но в ее конце показано, что рассматриваемая постановка эквивалентна постановке задачи, впервые рассмотренной в [10].

Для краткости далее не используются довольно громоздкие и не ставшие общеизвестными понятия из [7]. Все рассуждения ведутся в классических терминах в духе работ [4-6]. Но приведенные оценки достаточны для того, чтобы получить количественные результаты в терминах [7].

1. Постановка задачи

В основе рассматриваемой модели будет лежать игра с неопределенным фактором $\Gamma = \langle U, V, A, g, h \rangle$. Здесь U – множество управлений Центра, V – множество управлений агента нижнего уровня, A – множество значений неопределенного фактора, стремлением к увеличению значения функции $g: U \times V \to \mathbb{R}$ описываются интересы Центра, $h: U \times V \times A \to \mathbb{R}$ – функция выигрыша агента.

Далее для простоты будем считать, что множества U, V и A наделены топологиями и компактны, а функции g и h непрерывны по совокупности переменных в этих топологиях.

Игра Г описывает «технологические» аспекты взаимодействия Центра и агента. Сам процесс принятия решений будем описывать игрой с запрещенными ситуациями, которая строится на основе игры Г.

Стратегиями u_* Центра в этой игре будут всевозможные точечно-множественные отображения из множества V в множество U, которые ставят в соответствие каждому элементу $v \in V$ непустое подмножество $u_*(v)$ множества U. Множество всех стратегий Центра обозначим символом U_*. Если стратегия u_* Центра фиксирована, то агент вправе выбрать любую стратегию $v_* = (u, v)$ из множества $V_*(u_*) = \{(u, v) \in U \times V | u \in u_*(v)\}$. Если такие выборы сделаны и реализовалось значение неопределенного фактора $\alpha \in A$, то игроки получают выигрыши $g_*(u_*, v_*) = g(u, v)$ и $h_*(u_*, v_*, \alpha) = h(u, v, \alpha)$ соответсвенно. Набор $\langle U_*, V_*, A, g_*, h_* \rangle$ будем называть игрой Γ_*.

Интерпретация этих конструкций такова. Центр обладает правом первого хода. Он рассчитывает, и действительно будет иметь в момент принятия решения информацию о выборе агентом его «собственного» управления $v \in V$. Обладая этой информацией, Центр выбирает множество $u_*(v)$ «своих» управлений из которого агент может выбрать произвольное управление u. Непустота множества $u_*(v)$ при всех v означает, что на выбор агентом «его» управлений Центр напрямую повлиять не может: агент вправе выбрать любое управление $v \in V$. Выигрыши игроков зависят только от «физических» управлений, а выигрыш агента еще и от реализовавшегося значения неопределенного фактора.

Чтобы описание конфликта было полным, нужно задать отношение игроков к неопределенности. Сделаем это с помощью следующего определения.

Определение 1. Число γ называется гарантированным результатом в игре Γ_*, если существует такая стратегия $u_* \in U_*$, что для любого $\alpha \in A$ найдется число λ, для которого выполняются следующие условия:

1) существует стратегия $w_* \in V_*(u_*)$, для которой $h_*(u_*, w_*, \alpha) \geq \lambda$;

2) для любой стратегии $v_* \in V_*(u_*)$ или $g_*(u_*, v_*) \geq \gamma$ или $h_*(u_*, v_*, \alpha) < \lambda$.

Про соответствующую стратегию u_* будем говорить, что она гарантирует получение результата γ. Точная верхняя грань $R(\Gamma_*)$ всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом Центра в игре Γ_*.

Переформулируем это определение в терминах исходной игры Г.

Определение 1′. Число γ называется гарантированным результатом в игре Γ_*, если существует такая стратегия $u_* \in U_*$, что для любого $\alpha \in A$ найдется число λ, для которого выполняются следующие условия:

1) существуют управление $w \in V$ и управление $u \in u_*(w)$, для которых $h(u, w, \alpha) \geq \lambda$;

2) для любого управления $v \in V$ и любого $\omega \in u_*(v)$ или $g(\omega, v) \geq \gamma$ или $h(\omega, v, \alpha) < \lambda$.

Про соответствующую стратегию u_* будем говорить, что она гарантирует получение результата γ. Точная верхняя грань $R(\Gamma_*)$ всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом Центра в игре Γ_*.

Остановимся на содержательном смысле этого определения. Как уже говорилось, предполагается, что Центр обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает стратегию $u_* \in U_*$ и сообщает об этом выборе партнеру. Кроме того, будем предполагать, что в момент принятия решения агент имеет достоверную информацию о реализовавшемся значении $\alpha \in A$. В таком случае агент принимает решение в отсутствие неопределенности (его выигрыш зависит только от его выбора). В таком случае все его стратегии можно разделить на два множества: рациональные и нерациональные. В определении предполагается, что это разделение производится по «пороговому» принципу. Если выполняется неравенство $h_*(u_*, v_*, \alpha) \geq \lambda$, то стратегия v_* рациональна, а если верно неравенство $h_*(u_*, v_*, \alpha) < \lambda$, то она нерациональна. Такое поведение может оценить Центр. Будем предполагать, что он исходит из того, что агент выберет одну уз рациональных стратегий. Какую именно – он не знает. Кроме того, ему не известно значение неопределенного фактора, а известно лишь множество его возможных значений A. Считаем, что он ориентируется на наихудший случай. И если в этом наихудшем случае он получает выигрыш, не худший γ, то γ – гарантированный результат.

Немного необычным в рассматриваемой постановке является использование точечно-множественных отображений вместо однозначных функций. Обсудим эту особенность. Разница здесь существенна, как показывает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим игру Г в которой $U = \{-1,1\}$, $V = \{0,1\}$, $A = \{-1,1\}$, $g(u, v, \alpha) = v$, $h(u, v, \alpha) = \alpha uv$.

Пусть u_* такая стратегия, что при любом v множество $u_*(v)$ состоит из одной точки $u_\#(v)$. Допустим, реализовалось значение $\alpha = -u_\#(1)$. Тогда, очевидно, стратегия $w_* = (0, u_\#(0))$ позволяет агенту получить выигрыш, равный нулю, а стратегия $v_* = (1, u_\#(1))$ позволяет ему получить выигрыш -1. Значит, в зависимости от λ могут выполняться либо оба неравенства $h_*(u_*, w_*, \alpha) \geq \lambda$ и $h_*(u_*, v_*, \alpha) \geq \lambda$, либо только первое из них. В обоих случаях в силу второго пункта определения 1 имеем $0 = g_*(u_*, w_*) \geq \gamma$.

Таким образом, всякая «однозначная» стратегия гарантирует Центру получение лишь нулевого выигрыша.

Теперь рассмотрим стратегию u_*, у которой $u_*(v) = \{-1,1\}$ при всех $v \in V$. Покажем, что эта стратегия гарантирует Центру получение выигрыша $\gamma = 1$. Пусть реализовалось значение α. Положим $\lambda = 1$. Тогда для стратегии $w_* = (1, \alpha)$ неравенство $h_*(u_*, w_*, \alpha) \geq \lambda$ справедливо, т.е. первый пункт определения 1 выполнен. А если $g_*(u_*, v_*) < \gamma = 1$, то такая стратегия v_* имеет вид $v_* = (0, u)$ для какого-то u и тогда $h(\omega, v, \alpha) < \lambda$, т.е. и второй пункт определения выполнен.

Значит, максимальный гарантированный результат в рассматриваемой игре равен 1 (глобальному выигрышу Центра). Заметим, что стратегия $u_*(v) = \{-1,1\}$ позволяет и агенту получить его максимальный выигрыш, не зависимо от того, какое значение α реализуется.

Подумаем теперь, в каких случаях модель с «однозначными» стратегиями адекватна, а рассматриваемая модель – нет. Понятно, что требование однозначности накладывает некие ограничения. Причем, Центру это новое ограничение ничего не дает: он всегда может выбрать «однозначную» стратегию и в том случае, когда правилами разрешено использование многозначных. Но, как мы видели, эти ограничения могут оказаться невыгодными и Центру, и агенту. Значит, должен быть кто-то третий, кто накладывает это ограничение и может отследить его выполнение. На практике такого, вроде бы, не встречается.

Определение гарантированного результата предполагает поиск совсем неэлементарного объекта – точечно-множественного отображения u_*. На самом деле, максимальный гарантированный результат можно описать и в терминах «элементарной» игры Г.

2. Необходимое и достаточное условия гарантированного результата

Пусть γ – гарантированный результат и u_* – стратегия, гарантирующая получение такого результата.

Рассмотрим точечно-множественное отображение

$$\Omega(v) = \{u \in U | g(u, v) \geq \gamma\}.$$

Тогда стратегия u_*^0, определенная условием $u_*^0(v) = u_*(v) \cup \Omega(v)$, тоже гарантирует получение результата γ.

Действительно, для стратегии u_* и любого $\alpha \in A$ можно выбрать число λ и управления $v \in V$ и $u \in u_*(v)$, для которых выполняются оба пункта определения. Очевидно, для тех же λ, v и u первый пункт определения будет выполнен, поскольку $u \in u_*(v) \subset u_*^0(v)$. Второй пункт определения тоже будет выполнен, поскольку для любого $v \in V$ и любого $u \in u_*^0(v)$ или $u \in u_*(v)$, или $u \in \Omega(v)$. В первом случае нужное утверждение немедленно следует из второго пункта определения для стратегии u_*. А во втором можно воспользоваться определением множества $\Omega(v)$.

Таким образом, можно, не умаляя общности считать, что стратегия u_*, гарантирующая получение результата γ, с самого начала удовлетворяет условию $\Omega(v) \subset u_*(v)$. Далее будем считать, что это условие выполнено.

Теперь можно конкретизировать значение числа λ в определении 1.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{graph}(\Omega) = \{(u, v) \in U \times V | u \in \Omega(v)\}.$$

В силу непрерывности функции g это множество замкнуто, а, значит, и компактно. Тогда корректно определена функция

$$\lambda^0(\alpha) = \max_{(u,v)\in \mathrm{graph}(\Omega)} h(u, v, \alpha).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что в определении 1 число $\lambda = \lambda^0(\alpha)$.

В самом деле, фиксируем произвольное $\alpha \in A$ и соответствующие этому α число λ и управления $w \in V$ и $u \in u_*(w)$. Для управлений w и u должен выполняться второй пункт определения, а, значит, $g(u, w) \geq \gamma$, т.е. $(u, w) \in \mathrm{graph}(\Omega)$. Следовательно, $\lambda^0(\alpha) \geq h(u, w, \alpha) \geq \lambda$. Но тогда, если второй пункт определения выполняется для выбранного значения λ, то тем более он будет выполнен, если заменить λ на $\lambda^0(\alpha)$. И первый пункт определения можно выполнить при замене λ на $\lambda^0(\alpha)$, если w и u заменить на какие-то управления $(u^0, w^0) \in \mathrm{graph}(\Omega)$, для которых $h(u^0, w^0, \alpha) = \lambda^0(\alpha)$. Таким образом, утверждение из предыдущего абзаца доказано.

Определим множество

$$\mathrm{dom}(\Omega) = \{v \in V | \Omega(v) \neq \emptyset\}.$$

Если $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$, то в силу второго пункта определения 1 для любого $\alpha \in A$ и любого $\omega \in u_*(v)$ должно выполняться неравенство $h(\omega, v, \alpha) < \lambda^0(\alpha)$. Следовательно,

$$\min_{\omega\in U} \max_{\alpha\in A} \big(h(\omega, v, \alpha) - \lambda^0(\alpha)\big) < 0.$$

Тогда в силу произвольности $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$ выполняется условие: либо

$$\sup_{v\notin \mathrm{dom}(\Omega)} \min_{\omega\in U} \max_{\alpha\in A} \big(h(\omega, v, \alpha) - \lambda^0(\alpha)\big) < 0, \tag{1}$$

либо

$$\sup_{v\notin \mathrm{dom}(\Omega)} \min_{\omega\in U} \max_{\alpha\in A} \big(h(\omega, v, \alpha) - \lambda^0(\alpha)\big) = 0 \tag{2}$$

но верхняя грань в этой формуле не достигается.

Справедливо и обратное. Если сформулированное условие выполнено, то γ – гарантированный результат.

Положим $u_*(v) = \Omega(v)$, если $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$, и $u_*(v) = \{u_\#^p(v)\}$, где $u_\#^p(v)$ – такое управление, что

$$\max_{\alpha\in A} \Big(h\big(u_\#^p(v), v, \alpha\big) - \lambda^0(\alpha)\Big) < 0$$

(в силу сформулированного условия такое управление существует). Покажем, что таким образом определенная стратегия $u_*(v)$ гарантирует получение результата γ.

Рассмотрим произвольное $\alpha \in A$ и положим $\lambda = \lambda^0(\alpha)$. Тогда первый пункт определения $1'$ будет выполнен для любой пары (u, w), для которой $w \in \mathrm{dom}(\Omega), u \in u_*(w) = \Omega(w)$ и $h(u, w, \alpha) = \lambda^0(\alpha)$.

Разберемся со вторым пунктом. Если $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$, то для любого $\omega \in u_*(v) = \Omega(v)$ справедливо неравенство $g(\omega, v) \geq \gamma$, а, следовательно, второй пункт выполнен. Если же $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$, то включение $\omega \in u_*(v)$ равносильно равенству $\omega = u_\#^p(v)$ и, значит, $h\big(u_\#^p(v), v, \alpha\big) < \lambda^0(\alpha) = \lambda$, т.е. и в этом случае второй пункт выполнен.

А раз оба пункта определения $1'$ выполнены при произвольном $\alpha \in A$, число γ является гарантированным результатом.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Для того, чтобы число γ было гарантированным результатом в игре Γ_*, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: либо справедливо неравенство (1), либо имеет место равенство (2) и верхняя грань в нем не достигается.

Непосредственно проверяется, что

$$\mathrm{graph}(\Omega) = \{(u, v) \in U \times V | g(u, v) \geq \gamma\}.$$

Следовательно, это множество замкнуто. А тогда замкнута и его проекция $\mathrm{dom}(\Omega)$. Значит множество $V \backslash \mathrm{dom}(\Omega)$ открыто. По этой причине верхние грани в формулах (1) и (2) могут не достигаться.

Хотя это не отражено в обозначениях, точечно-множественное отображение Ω зависит от γ как от параметра. Соответственно и левые части формул (1) и (2) зависят от γ. Обозначим соответствующую функцию через $c(\gamma)$.

Если $\gamma' > \gamma$ и

$$\Omega'(v) = \{u \in U | g(u, v) \geq \gamma'\},$$

то для всех $v \in V$ выполняется включение $\Omega'(v) \subset \Omega(v)$. Поэтому $\mathrm{dom}(\Omega') \subset \mathrm{dom}(\Omega)$. Следовательно, функция $c(\gamma)$ не убывает.

Тогда из теоремы 1 немедленно следует, что

$$\sup_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') < 0\}} \gamma \leq R(\Gamma_*) \leq \inf_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') > 0\}} \gamma. \tag{3}$$

3. Устойчивость

До сих пор мы предполагали, что оперирующей стороне (Центру) точно известны все параметры игры Г. Далее будем исходить из более реалистического предположения о том, что оперирующая сторона знает функцию выигрыша агента лишь приблизительно. Моделируется это следующим образом.

Рассмотрим класс $\mathcal{G}$ игр $\Gamma = \langle U, V, A, g, h\rangle$, у которых множества U, V, A и функция g фиксированы, а функция h может меняться, оставаясь непрерывной по совокупности аргументов. Множество $\mathcal{G}$ можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние $\rho(\Gamma, \Gamma')$ между играми $\Gamma = \langle U, V, A, g, h\rangle$ и $\Gamma' = \langle U, V, A, g, h'\rangle$ условием

$$\rho(\Gamma, \Gamma') = \max_{(u,v,\alpha) \in U \times V \times A} |h(u, v, \alpha) - h'(u, v, \alpha)|.$$

Каждой игре Г из класса $\mathcal{G}$ соответствует игра с обратной связью Γ_*. Нас будет интересовать, как меняется максимальный гарантированный результат в игре Γ_* при малых (в метрике ρ) изменениях игры Г.

Положим

$$\lambda^{0\prime}(\alpha) = \max_{(u,v) \in \mathrm{graph}(\Omega)} h'(u, v, \alpha)$$

и

$$c'(\gamma) = \sup_{v \notin \mathrm{dom}(\Omega)} \min_{\omega \in U} \max_{\alpha \in A} \left(h'(\omega, v, \alpha) - \lambda^{0\prime}(\alpha)\right).$$

Из стандартных теорем анализа (см., например, [11], задача 4.1) следует, что если

$$\max_{(u,v,\alpha) \in U \times V \times A} |h(u, v, \alpha) - h'(u, v, \alpha)| < \varepsilon,$$

то $|\lambda(\gamma) - \lambda'(\gamma)| < \varepsilon$ и, значит, $|c(\gamma) - c'(\gamma)| < 2\varepsilon$. Тогда из теоремы 1 немедленно получается следующее утверждение.

Теорема 2. Если $c(\gamma) < -2\varepsilon$, то для любой игры Γ' такой, что $\rho(\Gamma, \Gamma') < \varepsilon$, число γ является гарантированным результатом в соответствующей игре с обратной связью $\Gamma_*{}'$. А если $c(\gamma) > 2\varepsilon$, то ни для какой игры Γ' такой, что $\rho(\Gamma, \Gamma') < \varepsilon$, число γ не может быть гарантированным результатом в игре с обратной связью $\Gamma_*{}'$.

Остается открытым один вопрос. Установлено, что если $c(\gamma) < -2\varepsilon$, то число γ является гарантированным результатом в любой игре $\Gamma_*{}'$, достаточно близкой к игре Γ_*. Но как получить этот результат, не зная точно интересов агента? Проблема решается достаточно просто.

Пусть $c(\gamma) < -2\varepsilon$ и $\rho(\Gamma, \Gamma') < \varepsilon$.

Положим $u_*(v) = \Omega(v)$, если $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$, и $u_*(v) = \{u_\#^p(v)\}$, где $u_\#^p(v)$ – такое управление, что

$$\max_{\alpha \in A} \left(h\left(u_\#^p(v), v, \alpha\right) - \lambda^0(\alpha)\right) = \min_{\omega \in U} \max_{\alpha \in A} \left(h(\omega, v, \alpha) - \lambda^0(\alpha)\right).$$

Покажем, что такая стратегия u_* гарантирует Центру получение выигрыша γ в игре Γ_*'. Пусть реализовалось значение $\alpha \in A$. Положим $\lambda = \lambda^0(\alpha) - \varepsilon$.

Если управления $w \in V$ и управление $u \in U$ доставляют максимум

$$\max_{(u,v)\in \mathrm{graph}(\Omega)} h(u,v,\alpha),$$

то $h'(u,w,\alpha) \geq h(u,w,\alpha) - \varepsilon = \lambda^0(\alpha) - \varepsilon = \lambda$. Поэтому первый пункт определения $1'$ для игры Γ_*' выполнен.

Покажем, что выполнен и второй пункт. Если $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$ и $\omega \in u_*(v)$, то по определению $\omega \in \Omega(v)$ и потому $g(\omega, v) \geq \gamma$. Если же $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$ и $\omega \in u_*(v)$, то $\omega = u_\#^p(v)$ и тогда

$$h'(\omega,v,\alpha) - \lambda \leq h(\omega,v,\alpha) + \varepsilon - \lambda^0(\alpha) + \varepsilon = h(\omega,v,\alpha) - \lambda^0(\alpha) + 2\varepsilon =$$

$$= h\left(u_\#^p(v),v,\alpha\right) - \lambda^0(\alpha) + 2\varepsilon \leq \max_{\alpha\in A}\left(h\left(u_\#^p(v),v,\alpha\right) - \lambda^0(\alpha)\right) + 2\varepsilon =$$

$$= \min_{\omega\in U}\max_{\alpha\in A}\left(h(\omega,v,\alpha) - \lambda^0(\alpha)\right) + 2\varepsilon \leq$$

$$\leq \sup_{v\notin \mathrm{dom}(\Omega)} \min_{\omega\in U}\max_{\alpha\in A}\left(h(\omega,v,\alpha) - \lambda^0(\alpha)\right) + 2\varepsilon < 0,$$

т. е. $h'(\omega,v,\alpha) < \lambda$.

Поскольку оба пункта определения $1'$ выполнены, число γ является гарантированным результатом в любой игре Γ_*'. Таким образом, поставленный выше вопрос решен вполне удовлетворительно.

Несмотря на простоту, оценки из теоремы 2 являются точными.

Лемма 1. Если $c(\gamma) > -2\varepsilon$, то найдется такая игра Γ', что $\rho(\Gamma,\Gamma') \leq \varepsilon$ и число γ не является гарантированным результатом в соответствующей игре с обратной связью Γ_*'.

Доказательство. Рассмотрим функцию $z(t;\kappa,\varepsilon) = t - \frac{1}{2}(|t-\kappa-\varepsilon| - |t-\kappa+\varepsilon|)$. Очевидно, эта функция непрерывна,

- $z(t;\kappa,\varepsilon) = t + \varepsilon$ при $t < \kappa - \varepsilon$;
- $z(t;\kappa,\varepsilon) = \kappa$ при $\kappa - \varepsilon \leq t \leq \kappa + \varepsilon$;
- $z(t;\kappa,\varepsilon) = t - \varepsilon$ при $t > \kappa + \varepsilon$

(в частности $z(t;\kappa,\varepsilon) \leq \kappa - \varepsilon$ при $t \leq \kappa$) и для любого t_0 и любого $t_1 > t_0$ справедливо неравенство $\max\limits_{t_0\leq t\leq t_1} |t - z(t;\kappa,\varepsilon)| \leq \varepsilon$.

Фиксируем произвольное γ так, что $c(\gamma) > -2\varepsilon$ и положим $h'(u,v,\alpha) = z(h(u,v,\alpha), \lambda^0(\alpha) - \varepsilon, \varepsilon)$. Из сказанного выше следует, что эта функция непрерывна. Кроме того, для всех $(u,v) \in \mathrm{graph}(\Omega)$ выполняется неравенство $h'(u,v,\alpha) \leq \lambda^0(\alpha) - \varepsilon$.

Рассмотрим игру $\Gamma' = \langle U,V,A,g,h'\rangle$. По построению $\rho(\Gamma,\Gamma') \leq \varepsilon$. Покажем, что число γ не является гарантированным результатом в игре Γ_*'.

Допустим противное. Пусть стратегия u_* гарантирует Центру получение выигрыша γ в игре Γ_*'.

В силу неравенства $c(\gamma) > -2\varepsilon$ найдутся такое $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$ и такое $\alpha \in A$, что неравенство $h(\omega,v,\alpha) - \lambda^0(\alpha) > -2\varepsilon$ выполняется при всех $\omega \in U$. Фиксируем такое v и такое α и пусть при этом α первый пункт определения $1'$ выполняется для числа λ. Тогда в силу второго пункта определения пара (u,w), существование которой предусмотрено первым пунктом, принадлежит множеству $\mathrm{graph}(\Omega)$. Следовательно, $\lambda \leq h'(u,w,\alpha) \leq \lambda^0(\alpha) - \varepsilon$.

Но тогда для выбранных значений v и α и любого $\omega \in U$, в частности любого $\omega \in u_*(v)$ имеем $h(\omega,v,\alpha) - \lambda^0(\alpha) > -2\varepsilon$ а, значит, $h'(\omega,v,\alpha) - \lambda^0(\alpha) > -\varepsilon$. Но в силу второго пункта определения и условия $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$ должны выполняться неравенства $\lambda \geq h'(\omega,v,\alpha) > \lambda^0(\alpha) - \varepsilon$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Если $c(\gamma) < 2\varepsilon$, то для любого $\gamma' < \gamma$ найдется такая игра Γ', что $\rho(\Gamma,\Gamma') \leq \varepsilon$ и число γ' является гарантированным результатом в соответствующей игре с обратной связью Γ_*'.

Доказательство. Фиксируем число γ так, что $c(\gamma) < 2\varepsilon$ и число $\gamma' < \gamma$.

Рассмотрим функцию $y(t;\gamma,\gamma',\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\gamma-\gamma'}(|t-\gamma'| - |t-\gamma|)$. Эта функция непрерывна и удовлетворяет условию $|y(t;\gamma,\gamma',\varepsilon)| \leq \varepsilon$ при всех t. Кроме того, $y(t;\gamma,\gamma',\varepsilon)=\varepsilon$ при $t \geq \gamma$ и $y(t;\gamma,\gamma',\varepsilon)=-\varepsilon$ при $t \leq \gamma'$.

Положим $h'(u,v,\alpha) = h(u,v,\alpha) + y(g(u,v);\gamma,\gamma',\varepsilon)$. В силу свойства функции $y(t;\gamma,\gamma',\varepsilon)$ имеем $\rho(\Gamma,\Gamma') \leq \varepsilon$.

Покажем, что число γ' является гарантированным результатом в этой игре.

В силу неравенства $\gamma' < \gamma$ для точечно-множественного отображения

$$\Omega'(v) = \{u \in U | g(u,v) \geq \gamma'\}$$

выполняется условие $\Omega(v) \subset \Omega'(v)$ для всех $v \in V$. Следовательно, множество

$$\mathrm{graph}(\Omega') = \{(u,v) \in U \times V | u \in \Omega'(v)\}$$

содержит множество $\mathrm{graph}(\Omega)$ и потому

$$\lambda^{0\prime}(\alpha) = \max_{(u,v)\in \mathrm{graph}(\Omega')} h'(u,v,\alpha) \geq \max_{(u,v)\in \mathrm{graph}(\Omega)} h'(u,v,\alpha) = \max_{(u,v)\in \mathrm{graph}(\Omega)} h(u,v,\alpha) + \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\mathrm{dom}(\Omega) \subset \mathrm{dom}(\Omega') = \{v \in V | \Omega'(v) \neq \emptyset\}.$$

А тогда

$$c'(\gamma') = \sup_{v \notin \mathrm{dom}(\Omega')} \min_{\omega \in U} \min_{\alpha \in A} \left(h'(\omega,v,\alpha) - \lambda^{0\prime}(\alpha)\right) =$$

$$= \sup\nolimits_{v \notin \mathrm{dom}(\Omega')} \min\nolimits_{\omega \in U} \max\nolimits_{\alpha \in A} (h(\omega,v,\alpha) - \lambda^{0\prime}(\alpha)) - \varepsilon \leq$$

$$\leq \sup\nolimits_{v \notin \mathrm{dom}(\Omega')} \min\nolimits_{\omega \in U} \max\nolimits_{\alpha \in A} \left(h(\omega,v,\alpha) - \lambda^{0}(\alpha)\right) - 2\varepsilon \leq$$

$$\leq \sup\nolimits_{v \notin \mathrm{dom}(\Omega)} \min\nolimits_{\omega \in U} \max\nolimits_{\alpha \in A} \left(h(\omega,v,\alpha) - \lambda^{0}(\alpha)\right) - 2\varepsilon = \mathrm{c}(\gamma) - 2\varepsilon < 0.$$

Согласно теореме 2 тогда γ' является гарантированным результатом в игре Γ_*'. Лемма доказана.

Теперь можно разобраться с устойчивостью задачи вычисления максимального гарантированного результата.

Теорема 3. Если

$$\sup_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') < 0\}} \gamma = \inf_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') > 0\}} \gamma, \tag{4}$$

то задача вычисления максимального гарантированного результата в игре Γ_* устойчива в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из условия $\rho(\Gamma, \Gamma') < \delta$ следует, что максимальные гарантированные результаты в играх Γ_* и Γ_*' отличаются меньше, чем на ε.

Доказательство. Если условие (4) выполняется, то из неравенств (3) получается, что общее значение левой и правой частей равенства (4) является максимальным гарантированным результатом $R(\Gamma_*)$ Центра в игре Γ_*. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Пусть $\gamma = R(\Gamma_*) - \varepsilon$. Тогда $c(\gamma) < 0$. Пусть γ' таково, что $c(\gamma) < c(\gamma') < 0$. Выберем δ так, что $2\delta = -c(\gamma')$. Тогда из доказательства теоремы 2 следует, что для любой игры Γ', удовлетворяющей условию $\rho(\Gamma, \Gamma') < \delta$, выполняется неравенство $c'(\gamma') < 0$. Значит, по теореме 1 число γ' является гарантированным результатом в игре Γ_*'. Тогда справедливо неравенство $\gamma' \leq R(\Gamma_*')$. В силу монотонности функции $c(\gamma)$ из неравенства $c(\gamma) < c(\gamma')$ вытекает неравенство $\gamma < \gamma'$, то есть $R(\Gamma_*) - \varepsilon < \gamma'$. Следовательно, $R(\Gamma_*) - \varepsilon < R(\Gamma_*')$.

Пусть теперь $\gamma = R(\Gamma_*) + \varepsilon$. Тогда $c(\gamma) > 0$. Выберем числа γ' и δ так, что $c(\gamma) > c(\gamma') > 0$ и $2\delta = c(\gamma')$. Из оценок, полученных при доказательстве теоремы 2, следует, что тогда $c'(\gamma') > 0$ для любой игры Γ', удовлетворяющей условию $\rho(\Gamma, \Gamma') < \delta$. Значит, по теореме 1 число γ' не является гарантированным результатом в игре Γ_*'. Разумеется, тогда $R(\Gamma_*') \leq \gamma'$. В силу монотонности функции $c(\gamma)$ и условия $c(\gamma) > c(\gamma')$, выполняется неравенство $\gamma > \gamma'$ или $R(\Gamma_*) + \varepsilon > \gamma'$. Отсюда немедленно получаем $R(\Gamma_*) + \varepsilon > R(\Gamma_*')$.

Теорема доказана.

Этот результат тоже является точным. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Если

$$\sup_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') < 0\}} \gamma < \inf_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') > 0\}} \gamma, \tag{5}$$

то задача вычисления максимального гарантированного результата в игре Γ_* не устойчива.

Доказательство. Обозначим

$$\underline{\gamma} = \sup_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') < 0\}} \gamma \, , \overline{\gamma} = \inf_{\gamma \in \{\gamma' | c(\gamma') > 0\}} \gamma .$$

В силу монотонности функции $c(\gamma)$ для любого γ, удовлетворяющего условиям $\underline{\gamma} \leq \gamma \leq \overline{\gamma}$, в частности для $\gamma = R(\Gamma_*)$, имеет место равенство $c(\gamma) = 0$.

В силу неравенства (3) имеем $\underline{\gamma} \leq R(\Gamma_*) \leq \overline{\gamma}$. Тогда если условие (5) выполнено, Должно быть справедливо хотя бы одно из неравенств $\underline{\gamma} < R(\Gamma_*)$ или $R(\Gamma_*) < \overline{\gamma}$.

Пусть $\underline{\gamma} < R(\Gamma_*)$. В силу сказанного, $c\left(\underline{\gamma}\right) = 0$. Значит, при произвольном $\delta > 0$ выполняется неравенство $c(\gamma) > -2\delta$. Следовательно, в силу леммы 1 найдется такая игра Γ', что $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \delta$ и число $\underline{\gamma}$ не является гарантированным результатом в соответствующей игре с обратной связью ${\Gamma_*}'$. Но тогда $R({\Gamma_*}') \leq \underline{\gamma}$ и при любом положительном ε, удовлетворяющем условию $\varepsilon < R(\Gamma_*) - \underline{\gamma}$, имеет место неравенство $R({\Gamma_*}') < R(\Gamma_*) - \varepsilon$. Таким образом, в этом случае рассматриваемая задача не устойчива.

Пусть теперь $R(\Gamma_*) < \overline{\gamma}$. Так как $c(\overline{\gamma}) = 0$, при произвольном $\delta > 0$ выполняется неравенство $c(\gamma) < 2\delta$. В силу леммы 2 тогда для любого $\gamma' < \overline{\gamma}$ найдется такая игра Γ', что $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \delta$ и число γ' является гарантированным результатом в соответствующей игре с обратной связью ${\Gamma_*}'$. Можем считать, что $R(\Gamma_*) < \gamma'$. Разумеется, $R({\Gamma_*}') \geq \gamma'$. А тогда при $\varepsilon < \gamma' - R(\Gamma_*)$ будет выполняться неравенство $R({\Gamma_*}') > R(\Gamma_*) + \varepsilon$. Следовательно, и в этом случае задача вычисления максимального гарантированного результата в игре Γ_* не устойчива.

Лемма доказана.

Утверждение этой леммы не совсем очевидно, поскольку, если γ – значение функции $g(u, v)$ в одной из точек ее локального максимума, то при этом γ функция $c(\gamma)$ может иметь разрыв. Впрочем, приведенное доказательство леммы 3 не слишком сложно и вполне естественно.

4. Связь с традиционной постановкой

Обычно изучают модели, в которых предполагается та же информированность игроков о внешней среде, но рассматривается несколько иной способ взаимодействия Центра и агента. Сравним рассмотренную выше модель с классической. Начнем с постановки последней.

По-прежнему будем считать, что в основе модели лежит игра $\Gamma = \langle U, V, A, g, h \rangle$. Сохраним предположение о том, что в момент принятия решения агент знает реализовавшееся значение неопределенного фактора, а Центр не имеет такой информации и знает только множество A. Будем считать, что до окончательного выбора своего управления Центр получает достоверную информацию об управлении, выбранном его партнером. Кроме того, второй игрок может сообщить ему информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора, назвав некоторый элемент $\beta \in A$. Но при этом он может солгать, а первый игрок не имеет возможности проверить достоверность полученной информации.

Формализуются эти предположения следующим образом. Рассмотрим игру $\Gamma_\# = \langle U_\#, V_\#, A, g_\#, h_\# \rangle$. Агент выбирает, во-первых, свое управление $v \in V$, а во-вторых, сообщение $\beta \in A$, т.е. его множество стратегий представляет собой декартово произведение $V_\# = V \times A$. Множество стратегий $U_\#$ первого игрока представляет собой семейство всех функций $u_\# : V \times A \to U$. Функция выигрыша первого игрока $g_\#$ задается условием $g_\#(u_\#, v_\#) = g(u_\#(v, \beta), v)$ где $v_\# = (v, \beta)$. Аналогично, выигрыш агента задается формулой $h_\#(u_\#, v_\#, \alpha) = h(u_\#(v, \beta), v, \alpha)$.

Игра $\Gamma_\#$ имеет ту же логическую структуру, что и игра Γ_*. Поэтому для нее можно определить максимальный гарантированный результат, дословно повторив определение 1 (с заменой значка «*» индексом «#»). В терминах исходной игры Γ это определение перепишется следующим образом.

Определение 1′′. Число γ называется гарантированным результатом в игре $\Gamma_\#$, если существует такая стратегия $u_\# \in U_\#$, что для любого $\alpha \in A$ найдется число λ, для которого выполняются следующие условия:

1) существуют управление $w \in V$ и сообщение $\beta \in A$, для которых $h(u_\#(w, \beta), w, \alpha) \geq \lambda$;

2) для любого управления $v \in V$ и любого сообщения $\sigma \in A$ или $g(u_\#(v, \sigma), v) \geq \gamma$ или $h(u_\#(v, \sigma), v, \alpha) < \lambda$.

Про соответствующую стратегию $u_\#$ будем говорить, что она гарантирует получение результата γ. Точная верхняя грань $R(\Gamma_\#)$ всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_\#$.

Классы стратегий игроков в играх Γ_* и $\Gamma_\#$ существенно различаются. Но максимальные гарантированные результаты Центра в этих играх совпадают. Более того, зная стратегию, гарантирующую получение результата γ в одной игре, несложно построить стратегию, гарантирующую получение такого же результата в другой. Покажем это.

Пусть γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_\#$ и $u_\#$ – стратегия, гарантирующая получение такого результата. Рассмотрим произвольное $\alpha \in A$. В силу определения $1''$ для этого α существуют число λ, управление w и сообщение β для которых выполняются оба пункта определения $1''$. Фиксируем эти элементы.

Определим стратегию u_* в игре Γ_* условием $u_*(v) = \{u_\#(v,\beta) | \beta \in A\}$. Покажем, что для этой стратегии u_* и выбранного числа λ выполняются оба пункта определения $1'$.

Возьмем уже зафиксированные значения $w \in V$ и $\beta \in A$ и положим $u = u_\#(w,\beta)$. Тогда $h(u,w,\alpha) = (h(u_\#(w,\beta),w,\alpha) \geq \lambda$, следовательно, первый пункт определения выполнен.

Теперь рассмотрим произвольное управление $v \in V$ и любое $\omega \in u_*(v)$. Тогда по построению найдется такое $\sigma \in A$, что $\omega = u_\#(v,\sigma)$. Значит, одно из неравенств $g(\omega,v) = g(u_\#(v,\sigma),v) \geq \gamma$ или $h(\omega,v,\alpha) = h(u_\#(v,\sigma),v,\alpha) < \lambda$ справедливо, т.е. второй пункт определения $1'$ выполнен.

Поскольку $\alpha \in A$ выбиралось произвольно, это означает, что γ – гарантированный результат в игре Γ_*. А так как γ – произвольный гарантированный результат в игре $\Gamma_\#$, отсюда следует, что $R(\Gamma_*) \geq R(\Gamma_\#)$.

Пусть теперь γ – гарантированный результат в игре Γ_*. Тогда существует стратегия u_* в игре Γ_* специального вида, описанного при доказательстве теоремы 1, которая гарантирует получение такого результата. Зафиксируем такую стратегию. Пусть задано произвольное $\alpha \in A$. Ему отвечают число λ и управления $w \in V$ и $u \in u_*(w)$, для которых выполняются оба пункта определения $1'$. Зафиксируем эти элементы.

Определим стратегию $u_\#$ в игре $\Gamma_\#$ следующим образом. Если $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$ и $\alpha \in A$, то выберем значение $u_\#(v,\ \alpha)$ так, что $u_\#(v,\ \alpha) \in \Omega(v)$ и

$$h(u_\#(v,\alpha),v,\alpha) = \max_{u \in \Omega(v)} h(u,v,\alpha).$$

А если $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$, выберем $u_\#(v,\alpha)$ произвольно, лишь бы только выполнялось включение $u_\#(v,\alpha) \in u_*(v)$. Покажем, что так построенная стратегия $u_\#$ гарантирует Центру получение результата γ в игре $\Gamma_\#$.

В силу специального выбора стратегии u_* и второго пункта определения $1'$ выполняется включение $u \in \Omega(w)$. Но тогда $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$ и по определению стратегии $u_\#$ выполняется первое из неравенств $h(u_\#(w,\alpha),w,\alpha) \geq h(u,w,\alpha) \geq \lambda$. Таким образом, первый пункт определения $1''$ выполнен.

Обратимся ко второму пункту. Пусть $v \in V$ и $\sigma \in A$ выбраны произвольно. Если $v \in \mathrm{dom}(\Omega)$, то по построению $u_\#(v,\sigma) \in \Omega(v)$ и, значит, $g(u_\#(v,\sigma),v) \geq \gamma$. Если же $v \notin \mathrm{dom}(\Omega)$, то в силу этого условия и включения $u_\#(v,\alpha) \in u_*(v)$ будем иметь $h(u_\#(v,\sigma),v,\alpha) < \lambda$. Значит и второй пункт определения $1''$ выполнен.

В силу произвольности $\alpha \in A$ это означает, что γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_\#$. А так как γ произвольно, отсюда следует неравенство $R(\Gamma_\#) \geq R(\Gamma_*)$.

Вместе два доказанных неравенства дают равенство $R(\Gamma_*) = R(\Gamma_\#)$.

Определение $1''$ с точностью до обозначений совпадает с определением 1 из статьи [12]. А в [12] показано, что это определение равносильно определению максимального гарантированного результата из [10]. Таким образом, в данной работе решена, по сути, классическая задача.

5. Заключение

Игры с неопределенными факторами неоднократно исследовались в теории иерархических игр [13], теории активных систем [14], теории контрактов [15] и т.д. Честно говоря, были определенные основания предполагать, что с устойчивостью соответствующих задач дело обстоит не совсем благополучно. Полученные выше результаты позволяют утверждать, что худшие опасения не оправдались, по крайней мере, для одной постановки задачи. Это свидетельствует о разумно выбранном способе моделирования конфликта.

Остановимся на использованной выше технике. Нетрадиционным является использование точечно-множественных отображений в качестве стратегий. При постановке задачи это приводит к несколько тяжеловесным конструкциям. Но зато решение получившейся задачи сводится к недлинной последовательности весьма естественных и технически несложных шагов. Сравнение сложности доказательства теоремы 1 и эквивалентной ей теоремы из статьи [10] достаточно показательно.

«Ответ» в этой задаче тоже получен в не совсем традиционной форме. Казалось бы, он существенно сложнее, чем явная формула для максимального гарантированного результата из [10]. Особенно настораживает отдельное выделение случая, когда верхняя грань не достигается. От этого недостатка свободна формула (3), но она дает лишь оценки максимального гарантированного результата, а не его точное значение. Мне уже несколько раз приходилось записывать полученные результаты в похожей форме (см., например, [12]). При этом приходилось отмечать, что из-за возможной неустойчивости задачи осмысленными являются именно эти оценки, а не «точный» результат. В данной работе этот тезис получил явную математическую формулировку и строгое обоснование.

А при исследовании устойчивости уже новый способ записи ответа приводит к более простым и наглядным результатам. Чтобы понять это, можно сравнить теоремы о регуляризации игры Γ_2 из [5] или [9] с теоремой 2 (игре Γ_2 соответствуют модели из рассмотренного выше класса, у которых множество A состоит из одной точки).

В работе исследована задача оценки устойчивости в «мягкой» топологической постановке. При этом нет достаточно естественной меры «типичности» устойчивых задач. Из полученных результатов легко следует, что множество «устойчивых» игр открыто в рассматриваемом классе моделей. Чуть сложнее, но можно показать, что это множество всюду плотно в классе рассматриваемых игр (при этом используются идеи, близкие к тем, которые были применены при доказательстве лемм 1 и 2). В этом смысле устойчивые игры являются типичными. А вот формально поставить вопрос о том, становятся ли устойчивые задачи более или менее «типичными» при расширении множества A уже непросто. Хотя ответ на этот вопрос кажется интересным. Но здесь явно напрашивается другая постановка задачи в духе теории катастроф [16]. А это возвращает нас к более тонкому геометрическому анализу модели из [10].

Кстати говоря, видимо интерпретация исследуемой модели, которая нашла отражение в названии статьи [10], повлияла на то, что устойчивость этой задачи до сих пор не исследовалась. В самом деле, эта интерпретация предполагает, что наличие неопределенного параметра α как раз и отражает неточное знание Центром интересов партнера. Но тогда при исследовании устойчивости задачи и следует изучать зависимость максимального гарантированного результата от этого параметра. Но та же модель допускает иную интерпретацию, при которой α – это внешний «физический» параметр. А тогда исследование устойчивости полученной задачи по отношению к изменениям функции выигрыша агента становится осмысленным.

Литература

1. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
2. *Hadamard J.* Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéares hyperboliques. – Paris: Hermann, 1932. – 542 с.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
5. *Молодцов Д.А.* Устойчивость принципов оптимальности // Современное состояние теории исследования операций. – М.: Наука, 1979. – С. 236–262.
6. *Новиков Д.А.* Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. – М.: Институт проблем управления РАН, 1998. – 68 с.
7. *Молодцов Д.А.* Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1987. – 280 с.
8. *Кушнер Б.А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973. – 447 с.
9. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
10. *Кононенко А.Ф.* Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. N 2. – С. 311–317.
11. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях – М.: Высшая школа, 1986. – 287 с.
12. *Горелов М.А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. 2016. Вып. 59. – С. 6–22.
13. *Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В.* Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
14. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.
15. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract theory. – Cambridge: The MIT Press, 2004. – 744 с.
16. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.