DOI: 10.25728/mlsd.2023.0299

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ КАК УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА[1]

Никаноров С.О.[1], Павлова Н.Г.[1,2,3]
[1]*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*
[2]*Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Тамбов, Россия*
[3]*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия*
nikanorovso@yandex.ru, natasharussia@mail.ru

Аннотация. Открытая динамическая модель В.В. Леонтьева с непрерывным временем рассматривается как линейная динамическая система с управлением. В исследуемой модели управлением служит функция непроизводственного потребления. Получены необходимые условия замкнутости технологического множества — условия корректности модели, а именно, возможности применения «крайних» режимов производства.

Ключевые слова: модель Леонтьева, линейная динамическая система, технологическое множество.

Введение

Модель Леонтьева (см. [1, 2]) – математическая модель производственных процессов (модель «затраты – выпуск»), характеризующая связи между выпусками и затратами отраслей, обеспечивающими эти выпуски. В.В. Леонтьев разрабатывал эту модель с 1923 года, став одним из основоположников теории межотраслевого баланса. Модель Леонтьева включена в национальный учет во многих развитых странах и может использоваться для расчета важных показателей, таких как национальный ВВП. Основное применение анализа "затраты–выпуск" заключается в измерении экономических последствий событий, а также государственных инвестиций.

За последние сто лет в теории межотраслевого баланса появилось много обобщений модели. В частности, работе Ирвина Сэндберга [3] исследуется нелинейная версия модели межотраслевого баланса "затраты – выпуск" В.В. Леонтьева. Получены условия «работоспособности модели» состоящие в том, что существует уникальный неотрицательный вектор уровней производства продукции для каждого неотрицательного вектора конечного спроса, и вектор уровней выпуска зависит от вектора конечного спроса. Сэндбергом также показано, что утверждения, аналогичные принципу Лечателье-Самуэльсона как в слабой, так и в сильной формах для работоспособных систем Леонтьева, справедливы в контексте нелинейной модели. Однако рассматриваемая модель была нединамической, и, следовательно, в ней не представляется возможным более детальное описание экономической системы, например, учет инвестиций, анализ эффективности и т.д. В работе Роуз-Анне Даны и Моники Флорензано [4] исследуются асимптотические свойства равновесных величин в модели Леонтьева в случае, когда агенты обладают аддитивно-разделяемыми полезностями, оцениваются темпы роста равновесных количеств и цен, которые либо стремятся к нулю или бесконечности, либо остаются ограниченными снизу и сверху строго положительными векторами. Доказывается, что величины любого равновесия сходятся к величинам равновесия, которое растет с постоянной скоростью в случае однородных предпочтений. Вопрос существования положения равновесия в экономической системе представляет большую важность при исследовании модели, при исследовании большой системы важно, чтобы она была управляемой. Однако в данной работе рассматривается статическая модель, что, как и в работе, упомянутой ранее, не позволяет производить более глубокое описание и анализ моделей.

Первая в СССР и одна из первых в мире динамическая межотраслевая модель была разработана в Николаем Филипповичем Шатиловым (см. [5]). Исследование динамических моделей межотраслевого баланса было продолжено, в частности, в работах [6-9]. В работе Сергея Николаевича Масаева [6] были определены задачи управления динамической системой высокой размерности. Опираясь на баланс затрат и выпуска по Леонтьеву, была формализована динамическая система и синтезировано ее управление. В рамках исследования была разработана математическая модель, которая объединяет различные рабочие объекты, потребляющие и высвобождающие различные ресурсы. В результате Масаевым было установлено, что большие системы неэффективны без управления.

[1] *Теорема 2 получена Павловой Н.Г. при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/ в Тамбовском государственном университете имени Г. Р. Державина. Теорема 3 получена Никаноровым С.О. при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/ в ИПУ РАН.*

В настоящей работе продолжается исследование динамических моделей Леонтьева. Исследуемая модель описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициентами этой системы являются нормированные объемы ресурсов, необходимые для производства условной единицы товара, и коэффициенты инвестиций. В рассматриваемой модели ресурсы, производимые одной отраслью, инвестируются в другую. В следствие этого матрица прироста основных производственных фондов не является диагональной. Под открытостью динамической модели понимается существование в экономической системе потребления товаров и услуг, которые не связаны с процессом производства. Другими словами, в модели существует вектор конечного (непроизводственного) потребления. Непроизводственное потребление – использование или окончательное потребление предметов потребления людьми для удовлетворения жизненных потребностей. В процессе непроизводственного потребления предметы потребления исчезают сразу или постепенно. Непроизводственное потребление делится на личное (потребление населения) и общественное (удовлетворение общих потребностей).

Для корректного описания реальных процессов «затраты-выпуск» необходимо, чтобы в математической модели технологическое множество было замкнуто, в реальности это означает возможность применения «крайних» режимов производства. В работе получены необходимые условия замкнутости технологического множества как следствия теорем теории управления о свойствах множества достижимости, полученные вторым автором в [10].

1. Динамическая модель В. В. Леонтьева с непрерывным временем

1.1 Постановка задачи

В экономической системе производятся, реализуются, потребляются и инвестируются $n \epsilon \mathbb{N}$ типов ресурсов (товаров). При этом каждая отрасль производит только один уникальный тип продукта, то есть различные отрасли производят различные типы ресурсов. Под производственным процессом в каждой отрасли подразумевается преобразование некоторых типов ресурсов, взятых в определенных количествах, в некоторое количество ресурса одного соответствующего типа. При этом соотношение затрачиваемых ресурсов и выпускаемого продукта предполагается постоянным.

Открытая динамическая модель Леонтьева межотраслевых балансовых соотношений описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x = Ax + B\dot{x} + u, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, T]$, – вектор валовых выпусков отраслей, $A = \big(a_{ij}\big)$, $a_{ij} \in \mathbb{R}^n_+, i, j = \overline{1, n}$ – матрица прямых затрат размерности $n \times n$, $B = (b_{ij})$, $b_{ij} \in \mathbb{R}^n_+,$ $i, j = \overline{1, n}$ – матрица прироста основных производственных фондов, той же размерности, что и A, $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, T]$, – прирост выпуска отраслей, $u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n_+$, $\dot{\forall} t \in [0, T]$, – функция непроизводственного потребления.

Матрица A является продуктивной. Условие продуктивности матрицы A (см., например, [11]) заключается в том, что все элементы матрицы неотрицательные и для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n_+$ найдется такой вектор $w \in \mathbb{R}^n_+$, что $Aw + v = w$.

Всякую существенно ограниченную функцию u будем называть допустимой функцией непроизводственного потребления или допустимым управлением, для которой $u(t) \in \mathbb{R}^n_+$ для п.в. t.

Технологическим множеством в момент времени T называется множество

$$P_T = \{(-Ay, y): y \in D_T\}.$$

Здесь D_T – множество достижимости. Если интерпретировать D_T с экономической точки зрения, то это множество всех возможных векторов валовых выпусков, которые можно получить на временном промежутке $[0, T]$ при всех возможных допустимых функциях непроизводственного потребления. Технологическое множество формализует множество всех технологически допустимых векторов «выпусков-затрат» продукции. Одним из свойств технологического множества является достижимость предельных производственных планов, другими словами замкнутость. Таким образом, если в исследуемой модели технологическое множество не является замкнутым, то такая модель не является корректной и не может описывать процессы, происходящие в реальной экономике. Исходя из этого, одним из важных этапов исследования модели Леонтьева является получение условий замкнутости технологического множества.

1.2. Вспомогательные материалы

Для исследования свойств технологического множества необходимо формализовать задачу: представить её как управляемую систему и использовать теорему о топологических свойствах множества достижимости. Итак, рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u, \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь $x(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right) \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазового состояния системы, $\tilde{A} = \left(\tilde{a}_{ij}\right), \tilde{a}_{ij} \in \mathbb{R}^n$ – матрица размерности $n \times n$, $\tilde{B} = \left(\tilde{b}_{ij}\right), \tilde{b}_{ij} \in \mathbb{R}^n$ – матрица той же размерности, что и $\tilde{A}$, $u(t) = \left(u_1(t), \dots, u_n(t)\right) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления.

Всякую существенно ограниченную функцию u: $u(t) \in K$, $\dot{\forall} t \in [0, T]$, K – заданный выпуклый конечнопорожденный конус

$$K = \{v \in R^n : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \geq 0, v_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,k}\},$$

$v_i \neq 0$ – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, $v_i = (0, \dots, 1, \dots)$, $\forall i = \overline{1,k}$, будем называть допустимым управлением.

Здесь D_T – множество достижимости в момент времени T. Множество всех точек фазового пространства R_n, которые могут быть достигнуты в момент времени T из точки $x(0) = 0$ по решениям системы (1) при всех возможных управлениях $u(\cdot)$.

$$D_T = \{y \in R^n : y = x(T)\},$$

здесь $x(\cdot)$ – решение (1), с начальным условием (2), $u(\cdot), u(t) \in K$.

Определим матрицы

$$B_i = \tilde{A}^{i-1}\tilde{B}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Для получения необходимых условий замкнутости технологического множества воспользуемся следствием теоремы, доказанной в [10]. Она позволяет получить достаточные условия открытости технологического множества.

Теорема 1 (см. [10]). Пусть для любого $i \in \{1,2, \dots, k\}$ справедливо равенство

$$rang\{B_1 v_i, B_2 v_i, \dots, B_n v_i\} = n.$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Теорема 1 позволяет исследовать топологические свойства технологического множества, которое определяется по соответствующему множеству достижимости в динамической модели Леонтьева, рассматриваемой как управляемая система с управлением — функцией непроизводственного потребления.

1.3. Исследование n-секторной динамической непрерывной модели Леонтьева

В работах Павловой Н.Г. [12,13] были получены необходимые условия замкнутости технологического множества для n-секторной модели, в которой матрица B является диагональной. Такая модель описывает производственные процессы, в которых доход от реализации продукции, произведённой отраслью, инвестируется в развитие этой же отрасли. В реальных производственных ситуациях доходы одной отрасли могут инвестироваться в развитие других отраслей. В абстрактной постановке это соответствует случаю недиагональной матрицы B.

Рассмотрим систему (1), (2), в которой матрица B является невырожденной диагонализуемой.

Теорема 2. Пусть технологическое множество P_T в момент времени T в динамической модели Леонтьева (1), (2) замкнуто. Тогда

$$\exists\, i = \overline{1,n} : det\{\bar{B}^{-1} g_i, \bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\bar{B}^{-1} g_i, \dots, (\bar{B}^{-1}(E - \bar{A}))^{n-1}\bar{B}^{-1} g_i\} = 0,$$

где $\bar{B} = diag\{\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n\}$, $g_1, \dots, g_n$ — собственные векторы, $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — соответствующие собственные значения матрицы B, $A= S\bar{A}S^{-1}$, S — матрица перехода к базису из собственных векторов матрицы B $g_1, \dots, g_n$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1. В силу невырожденности матрицы B матрицы B_i для системы (1) имеют вид:

$$B_1 = -B^{-1}, B_2 = -B^{-1}(E-A)B^{-1}, \dots, B_n = -\left(B^{-1}(E-A)\right)^{n-1}B^{-1}.$$

Для рассматриваемой задачи

$$v_1 = (1,0,\dots,0), v_2 = (0,1,\dots,0), \dots, v_n = (0,0,\dots,1).$$

Тогда

$$\forall i = \overline{1,n} \quad rang\{B_1v_i, B_2v_i, \dots, B_nv_i\} =$$
$$= rang\{B^{-1}v_i, B^{-1}(E-A)B^{-1}v_i, \dots, \left(B^{-1}(E-A)\right)^{n-1}B^{-1}v_i\}.$$

Имеем

$$\forall i = \overline{1,n} \quad rang\{B_1v_i, B_2v_i, \dots, B_nv_i\} =$$
$$= rang\{(S\bar{B}S^{-1})^{-1}v_i, (S\bar{B}S^{-1})^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})(S\bar{B}S^{-1})^{-1}v_i, \dots,$$
$$\left((S\bar{B}S^{-1})^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})\right)^{n-1}(S\bar{B}S^{-1})^{-1}v_i\} =$$
$$= rang\{S\bar{B}^{-1}S^{-1}v_i, S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})S\bar{B}^{-1}S^{-1}v_i, \dots,$$
$$\left(S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})\right)^{n-1}S\bar{B}^{-1}S^{-1}v_i\}.$$

В силу свойств матрицы перехода

$$\forall i = \overline{1,n} \quad rang\{B_1v_i, B_2v_i, \dots, B_nv_i\} =$$
$$rang\{S\bar{B}^{-1}g_i, S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})S\bar{B}^{-1}g_i, \dots, \left(S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})\right)^{n-1}S\bar{B}^{-1}g_i\}.$$

Далее

$$E - S\bar{A}S^{-1} = S(E - \bar{A})S^{-1}.$$

Тогда

$$S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})S\bar{B}^{-1} = S\bar{B}^{-1}S^{-1}S(E-\bar{A})S^{-1}S\bar{B}^{-1} = S\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})\bar{B}^{-1},$$
$$\left(S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})\right)^{n-1}S\bar{B}^{-1} = (S\bar{B}^{-1}S^{-1}S(E-\bar{A})S^{-1})^{n-1}S\bar{B}^{-1} =$$
$$= (S\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})S^{-1})^{n-1}S\bar{B}^{-1} = \underbrace{S\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})S^{-1}S\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})S^{-1} \dots S\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})S^{-1}}_{n-1}\ S\bar{B}^{-1} =$$
$$= S\left(\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})\right)^{n-1}S^{-1}S\bar{B}^{-1} = S\left(\bar{B}^{-1}(E-\bar{A})\right)^{n-1}\bar{B}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\forall i = \overline{1,n} \quad rang\{B_1v_i, B_2v_i, \dots, B_nv_i\} =$$
$$= rang\{\bar{B}^{-1}g_i, \bar{B}^{-1}(E-\bar{A})\bar{B}^{-1}g_i, \dots, (\bar{B}^{-1}(E-\bar{A}))^{n-1}\bar{B}^{-1}g_i\}.$$

Осталось заметить, что условие

$$\exists i = \overline{1,n} \quad rang\{B_1v_i, B_2v_i, \dots, B_nv_i\} < n$$

эквивалентно условию

$$\exists i = \overline{1,n} \quad det\{B_1v_i, B_2v_i, \dots, B_nv_i\} = 0.$$

Теорема доказана.

1.4. Исследование двухсекторной динамической непрерывной модели Леонтьева

Рассмотрим двухсекторную модель межотраслевого баланса, в которой доходы одной отрасли инвестируются также в другую отрасль. Она была описана в [9,10].

$$x = \hat{A}x + \hat{B}\dot{x} + u\,.$$

Матрица $\hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{pmatrix}$ предполагается невырожденной.

Следующее уравнение эквивалентно системе (1)

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\hat{a}_{11} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & 1-\hat{a}_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Выразим вектор $\dot{x}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1}\begin{pmatrix} 1-\hat{a}_{11} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & 1-\hat{a}_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \hat{B}^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу, обратную матрице $\hat{B}$:

$$\hat{B}^{-1} = \frac{1}{\hat{b}_{11}\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}\hat{b}_{21}}\begin{pmatrix} \hat{b}_{22} & -\hat{b}_{12} \\ -\hat{b}_{21} & \hat{b}_{11} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\hat{a}_{11} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & 1-\hat{a}_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Для получения необходимых условий замкнутости технологического множества введём в рассмотрение матрицы B_1, B_2:

$$B_1 = -\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = -\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\hat{a}_{11} & -\hat{a}_{12} \\ -\hat{a}_{21} & 1-\hat{a}_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$B_2 = \begin{pmatrix} \check{b}_{11} & \check{b}_{12} \\ \check{b}_{21} & \check{b}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\check{b}_{11} = c_{11}^2(\hat{a}_{11} - 1) + c_{11}c_{21}\hat{a}_{12} + c_{11}c_{12}\hat{a}_{21} + c_{12}c_{21}(\hat{a}_{22} - 1),$$
$$\check{b}_{12} = c_{11}c_{12}(\hat{a}_{11} - 1) + c_{11}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{12}^2\hat{a}_{21} + c_{12}c_{22}(\hat{a}_{22} - 1),$$
$$\check{b}_{21} = c_{11}c_{21}(\hat{a}_{11} - 1) + c_{21}^2\hat{a}_{12} + c_{11}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{21}c_{22}(\hat{a}_{22} - 1),$$
$$\check{b}_{22} = c_{12}c_{21}(\hat{a}_{11} - 1) + c_{21}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{12}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{22}^2(\hat{a}_{22} - 1).$$

Введем векторы $v_1, v_2 \in K$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$B_1 v_1 = -\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{11} \\ -c_{21} \end{pmatrix}, \qquad B_1 v_1 = -\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{12} \\ -c_{22} \end{pmatrix}.$$

Далее

$$B_2v_1 = \begin{pmatrix} c_{11}^2(\hat{a}_{11}-1) + c_{11}c_{21}\hat{a}_{12} + c_{11}c_{12}\hat{a}_{21} + c_{12}c_{21}(\hat{a}_{22}-1) \\ c_{12}c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}^2\hat{a}_{12} + c_{11}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{21}c_{22}(a_{22}-1) \end{pmatrix},$$

$$B_2v_2 = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}(\hat{a}_{11}-1) + c_{11}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{12}^2\hat{a}_{21} + c_{12}c_{22}(\hat{a}_{22}-1) \\ c_{12}c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{11}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{22}^2(a_{22}-1) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с условиями теоремы 1 необходимо вычислить $rang\{B_1v_1, B_2v_2\}, rang\{B_1v_2, B_2v_2\}$, при этом, чтобы технологическое множество являлось замкнутым, необходимо, чтобы $rang\{B_1v_1, B_1v_2\} < n,\ rang\{B_2v_1, B_2v_2\} < n$.

Тогда, чтобы технологическое множество D_T было замкнутым, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$rang(B_1v_1, B_2v_1) = rang\begin{pmatrix} -c_{11} & c_{11}^2(\hat{a}_{11}-1) + c_{11}c_{21}\hat{a}_{12} + c_{11}c_{12}\hat{a}_{21} + c_{12}c_{21}(\hat{a}_{22}-1) \\ -c_{21} & c_{12}c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}^2\hat{a}_{12} + c_{11}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{21}c_{22}(a_{22}-1) \end{pmatrix} < 2$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & c_{11}^2c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{11}c_{21}^2\hat{a}_{21} + c_{11}^2c_{22}a_{21} + c_{11}c_{21}c_{22}(\hat{a}_{22}-1) \\ & \qquad = c_{11}^2c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}^2c_{11}\hat{a}_{12} + c_{11}c_{12}c_{21}\hat{a}_{21} + c_{21}^2c_{12}(\hat{a}_{22}-1). \end{aligned}$$

$$rang(B_1v_2, B_2v_2) = rang\begin{pmatrix} -c_{12} & c_{11}c_{12}(\hat{a}_{11}-1) + c_{11}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{12}^2\hat{a}_{21} + c_{12}c_{22}(\hat{a}_{22}-1) \\ -c_{22} & c_{12}c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{11}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{22}^2(a_{22}-1) \end{pmatrix} < 2$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & c_{12}^2c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}c_{12}c_{22}\hat{a}_{12} + c_{11}^2c_{12}c_{22}\hat{a}_{21} + c_{12}c_{22}^2(\hat{a}_{22}-1) \\ & \qquad = c_{12}c_{21}c_{22}(\hat{a}_{11}-1) + c_{21}c_{22}^2\hat{a}_{12} + c_{11}c_{22}^2\hat{a}_{21} + c_{22}^2(\hat{a}_{22}-1). \end{aligned}$$

Упростим получившиеся соотношения, получим

P_T замкнуто тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{aligned} & c_{11}^2c_{22}c_{21} + c_{11}c_{21}c_{22}(\hat{a}_{22}-1) = c_{11}c_{12}c_{21}\hat{a}_{21} + c_{12}c_{21}^2(\hat{a}_{22}-1) \\ & c_{12}^2c_{21}(\hat{a}_{11}-1) + c_{12}c_{21}c_{22}\hat{a}_{12} = c_{11}c_{12}c_{22}(\hat{a}_{11}-1) + c_{11}c_{22}^2a_{12} \end{aligned}\right.,$$

$$\left[\begin{aligned} & c_{11}\hat{a}_{21} = c_{21}(1-\hat{a}_{22}) \\ & c_{22}\hat{a}_{12} = c_{12}(1-\hat{a}_{11}) \end{aligned}\right..$$

Произведем обратную замену $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \Delta \neq 0$, а также произведем обратную замену элементов c_{ij} на элементы матрицы $\hat{B}^{-1}$.

$$\left[\begin{aligned} & \frac{\hat{b}_{22}}{\Delta}\hat{a}_{21} = -\frac{\hat{b}_{21}}{\Delta}(1-\hat{a}_{22}) \\ & \frac{\hat{b}_{11}}{\Delta}\hat{a}_{12} = -\frac{\hat{b}_{12}}{\Delta}(1-\hat{a}_{11}) \end{aligned}\right..$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Пусть технологическое множество P_T в двухсекторной динамической модели Леонтьева (1), (2) является замкнутым. Тогда выполняется хотя бы одно из следующих условий

$$\left[\begin{aligned} & \frac{\hat{b}_{22}}{\hat{b}_{11}\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}\hat{b}_{21}}\hat{a}_{21} + \frac{\hat{b}_{21}}{\hat{b}_{11}\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}\hat{b}_{21}}(1-\hat{a}_{22}) = 0 \\ & \frac{\hat{b}_{11}}{\hat{b}_{11}\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}\hat{b}_{21}}\hat{a}_{12} + \frac{\hat{b}_{12}}{\hat{b}_{11}\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}\hat{b}_{21}}(1-\hat{a}_{11}) = 0 \end{aligned}\right..$$

2. Заключение

Полученные необходимые условия замкнутости технологического множества позволяют понять, корректно ли смоделирована производственная система. В подобных моделях сложность состоит в случаях, когда предполагается инвестирование ресурсов, произведенных одной отраслью, в другие. Другими словами, матрица $\hat{B}$ основных производственных фондов не является диагональной. Представленный подход может быть применен к исследованию других производственных моделей типа "затраты – выпуск", в частности к исследованию модели Леонтьева-Форда. Кроме того, результаты, полученные в настоящей статье, могут быть использованы при исследования математических моделей рыночных процессов (см., например, [14,15]) для описания отображения предложения совокупного производителя.

Литература

1. *Леонтьев В*. Предисловие // Межотраслевая экономика / Научный редактор и автор предисловия академик РАН А. Г. Гранберг; Пер. с англ. – М.: Экономика, 1997. – С. 19–20.
2. *Леонтьев В.* Спад и подъём советской экономической науки // Экономические эссе: Теории, исследования, факты и политика. – М.: Политиздат, 1990. – С. 218.
3. *Sandberg, I. W.* A Nonlinear Input-Output Model of a Multisectored Economy // Econometrica 41 (6), 1973. – P. 1167–1182.
4. *Dana R.A., Florenzano M., Levan C., Levy D.,* Asymptotic properties of a Leontief economy // Journal of Economic Dynamics and Control, Volume 13, Issue 4. – Elsevier 1989. – P. 553-568.
5. *Шатилов Н. Ф*. Моделирование расширенного воспроизводства. – М.: Экономика, 1967. – 173 с.
6. *Masaev, S. N.,* Leontev Input-Output Balance Model as a Dynamic System Control Problem // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering. 2(135)/2021. – P. 66–82.
7. *Белых А. А.* История российских экономико-математических исследований. Первые сто лет. – 2 изд. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 240 с.
8. *Ведута Н. И.* Экономическая кибернетика. – Мн.: Наука и техника, 1971. – 318 с.
9. *Смирнов А. Д.* Динамическая модель межотраслевого баланса. – М.: Московский институт народного хозяйства им. Плеханова, 1964. – 112 с.
10. *Арутюнов А. В., Павлова Н. Г.* О топологических свойствах множества достижимости линейных систем // Дифференц. уравнения, том 40, номер 11, 2004. – С. 1564–1566.
11. *Hawkins D., Herbert A. Simon* Some Conditions of Macroeconomic Stability // Econometrica, Vol. 17, 1949. –Р. 245.
12. *Павлова Н.Г.* Исследование открытой динамической модели Леонтьева с непрерывным временем как линейной динамической системы с управлением // Дифференц. уравнения, 55:1, 2019. – P. 111-116.
13. *Pavlova N. G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model // Eleventh International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). – IEEE, 2018. – P. 1–4.
14. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Dynamic Market Models with Known Elasticity, Journal of Mathematical Sciences, 269(6), 2023. – P. 847–852.
15. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model // Adv Syst Sci Appl, 23(2), 2023. – P. 184–194.