DOI: 10.25728/mlsd.2023.0277

МЕТОД ВЫРАВНИВАНИЯ ШКАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ОБЪЕКТОВ В ПОРЯДКОВОЙ ШКАЛЕ ПО КРИТЕРИЮ С МЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ГРАДАЦИЙ

Корнеенко В.П.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
vkorn@ipu.ru

Аннотация. В задачах многокритериального выбора инвестиционных проектов корректное применение аддитивного механизма агрегирования данных, представленных в различных шкалах измерения требует, чтобы исходные оценки были преобразованы в результирующие однородные шкалы, характеризующиеся одинаковым размахом и числом градаций. Одним из путей корректного применения аддитивной свёртки является построение результирующей шкалы, базирующейся на методах выравнивания шкал оценок проектов.

Ключевые слова: шкала измерения, результирующая шкала, важность критериев, выравнивание шкал.

Введение

Многие прикладные задач, которые по своей постановке относятся к многокритериальным задачам выбора, характеризуется рядом особенностей, к которым относятся многоуровневость структуры показателей качества и эффективности объектов, неравноважность показателей, разнотипность шкал измерения объектов, неоднородность и нелинейность областей значений оцениваемых объектов. При этом оказывается, что для корректного решения с учётом выше перечисленных особенностей подобного класса задач применение традиционных методов решения многокритериальных задач оказывается недостаточным [1, 2].

Для корректного применения аддитивного механизма агрегирования данных необходимо, чтобы оценки объектов по критериям $f_i, i = \overline{1,s}$, были представлены в однородных шкалах, т.е. с одинаковыми максимальными и минимальными значениями критериев, а также одинаковыми градациями порядковой шкалы [3].

Одним из методов построения результирующей шкалы является метод выравнивания шкальных оценок объектов в порядковой шкале по критерию с меньшим числом градаций.

1. Постановка задачи выравнивания оценок

Необходимо осуществить переход от порядковых шкал критериев к порядковой с меньшим числом градаций, которая выступает в качестве единой результирующей шкалой. В качестве показателя равномерной группировки выступает расстояние градаций результирующей шкалы от градаций множества разбиений исходной порядковой (балльной) шкалы.

Пусть n – число градаций исходной порядковой шкалы, множество которых обозначим через

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

а m – число градаций результирующей порядковой шкалы

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

где $m < n$.

Решение задачи перехода от порядковых шкал к порядковым с меньшим числом градаций сводится к поиску разбиения

$$\mathcal{R} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\} \tag{1}$$

числа градаций исходной шкалы на m частей при сохранении упорядочения исходных градаций при их группировке, а именно: представить множество градаций исходной шкалы в виде объединения подмножеств – классов, номера которых совпадают с номерами градаций результирующей шкалы:

$$X = \cup_{r=1}^{m} X_r,\ r = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $|X_r| = n_r$ – число градаций исходной шкалы, попадающих в отрезок X_r разбиения.

Математическая постановка задачи перехода (выравнивания) от порядковых (балльных) шкал к порядковым с меньшим числом градаций сводится к разбиению исходной шкалы, обеспечивающей минимум показателя:

$$\rho_* = \min_{\mathcal{R}} \sum_{r=1}^{m} \rho(y_r, X_r) = \min_{\mathcal{R}} \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_r} (y_r - x_{rk})^2,\ y_r, x_{rk} \in \{1,2, \dots\}, \tag{3}$$

где $\tilde{X}_r = \{x_{rk} | k = \overline{1, n_r}\}$ – градации X_r класса разбиения, а n_r – число градаций;
$\rho(y_r, X_r) = \sum_{k=1}^{n_r} |y_r - x_{rk}|$ – расстояние y_r градации до градаций из интервала X_r исходной шкалы.

Очевидно, что при оптимальном разбиении $\mathcal{R}$ градации y_r в результирующей шкале соответствует связный ранг [4]:

$$\bar{x}_r = \frac{1}{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} x_{rk} \tag{4}$$

в исходной шкале, а также числа градаций n_r, $r = \overline{1, m}$, классов разбиения, которые будем рассматривать как переменные.

В этом случае для нахождения числа градаций n_r в качестве показателя оптимальности, оценивающего качество разбиения на классы, возьмём квадрат отклонения числа градаций n_r от среднего значения

$$\overline{n} = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m} n_r, \tag{5}$$

то тогда задача нахождения числа градаций $n_1, \dots, n_m$ разбиения исходной шкалы на m подмножеств сводится к минимизации квадратичного функционала:

$$\sum_{r=1}^{m} (n_r - \overline{n})^2 \to \min_{\{n_1, \dots, n_m\}} \tag{6}$$

при условии

$$\sum_{r=1}^{m} n_r = n. \tag{7}$$

2. Метод перехода к порядковым шкалам с меньшим числом градаций

В основе метода перехода к порядковым шкалам с меньшим числом градаций лежит следующая теорема.

Теорема (Корнеенко, Рамеев). *При переходе от порядковых шкал к порядковым с меньшим числом градаций с сохранением упорядочения исходных градаций при их группировке, оптимальным решением оптимизационной задачи* (6)–(7) *будет равномерное разбиение исходной шкалы с числом градаций интервала X_r разбиения*:

$$n_r^* = \begin{cases} \frac{n}{m}, \text{ если } \frac{n}{m} \text{ – целое число;} \\ \left[\frac{n}{m}\right] + 1 \text{ для } n - \left[\frac{n}{m}\right] \times m \text{ классов, если } \frac{n}{m} \text{ – дробное;} \\ \left[\frac{n}{m}\right] \text{ для } m \times \left(1 + \left[\frac{n}{m}\right]\right) - n \text{ классов, если } \frac{n}{m} \text{ – дробное.} \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство.

Будем считать переменные n_r непрерывными. Для отыскания решения задачи (6)–(7), которая относится к классу задач выпуклого программирования, воспользуемся методом неопределённых множителей Лагранжа. Составим вспомогательную функцию Лагранжа:

$$L(n_1, \dots, n_m, u) = \sum_{r=1}^{m} (n_r - \overline{n})^2 + u\left(\sum_{r=1}^{m} n_r - n\right), \tag{9}$$

где u – неопределённый множитель Лагранжа.

Беря частные производные функции Лагранжа по переменным, находим стационарные точки:

$$\frac{\partial L(n_1, \dots, n_m, u)}{\partial n_r} = 2(n_r^* - \overline{n}) + u^* = 0, r = \overline{1, m}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial L(n_1, \dots, n_m, u)}{\partial u} = \sum_{r=1}^{m} n_r - n = 0. \tag{11}$$

Из (10) находим

$$n_r^* = \overline{n} - \frac{u^*}{2} \tag{12}$$

и подставив (12) в (11) получим

$$\sum_{r=1}^{m} n_r^* - n = 0 \Rightarrow \sum_{r=1}^{m} \left(\overline{n} - \frac{u^*}{2}\right) - n = 0 \Rightarrow m\left(\overline{n} - \frac{u^*}{2}\right) - n = 0,$$

т. е.

$$u^* = 2\left(\overline{n} - \frac{n}{m}\right). \tag{13}$$

Откуда, подставив в (12), получим

$$n_r^* = \frac{n}{m}. \qquad (14)$$

Легко убедиться, что в точке (n_r^*, u^*) выполняются достаточные условия локального минимума функции Лагранжа (9). Пусть $\frac{n}{m}$ – целое число, то $n_r^* = \frac{n}{m}$ – оптимальное решение исходной дискретной задачи, а если $\frac{n}{m}$ – не целое число, то оптимальные значения непрерывной задачи имеют вид:

$$n_r^* = \left[\frac{n}{m}\right] + \left\{\frac{n}{m}\right\},$$

где $\left[\frac{n}{m}\right]$ – целая часть числа n_r^*, $\left\{\frac{n}{m}\right\}$ – дробная часть числа $n_r^*, r = \overline{1, m}$.

Если m не делит n нацело, то справедливо неравенство

$$\left[\frac{n}{m}\right] < \; n_r^* < \left[\frac{n}{m}\right] + 1. \qquad (15)$$

Покажем, что оптимальное решение $n_1^*, \dots, n_r^*, \dots, n_m^*$ для целочисленных чисел удовлетворяет условию

$$\left|n_i^* - n_j^*\right| \le 1, \forall i, j = \overline{1, m}, . \qquad (16)$$

Пусть $n_i^* = \left[\frac{n}{m}\right]$ и $n_j^* = \left[\frac{n}{m}\right] + 1, i, j = \overline{1, m}$, то, исходя из неравенства (13), следует (14). Найдём числа эквивалентных классов разбиения.

Обозначим через m_i число классов, в которые входят $[n/m]$ градаций исходной шкалы, а через m_j число классов, в которые входят $\left[\frac{n}{m}\right] + 1$ градаций исходной шкалы разбиения.

Очевидно, что целочисленные решения должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} \left[\frac{n}{m}\right] m_i + \left(\left[\frac{n}{m}\right] + 1\right) \times m_j = n; \\ m_i + m_j = n; \end{cases} \qquad (17)$$

Решая систему алгебраических уравнений (17) относительно переменных $m_i,\; m_j$, получим:

$m_i = m \times \left(1 + \left[\frac{n}{m}\right]\right) - n$ – число классов, в которые входят $[n/m]$ градаций исходной шкалы;

$m_j = n - \left[\frac{n}{m}\right] \times m$ – число классов, в которые входят $\left[\frac{n}{m}\right] + 1$ градация исходной шкалы, что и требовалось доказать. Теорема доказана. ■

3. Пример перехода от 10-ти балльной к результирующей 7-ми балльной шкале

Рассмотрим переход от 10-ти балльной к результирующей 7-ми балльной порядковой шкале.

Пусть

$X = \{x_1, \dots, x_{10}\}$ – градации исходной порядковой шкалы, $n = 10$ – число градаций исходной,

$Y = \{y_1, \dots, y_7\}$ – результирующая шкала, $m = 7$ – число градаций результирующей порядковой шкалы.

Исходная шкала разбивается на следующее число градаций в классах (подмножествах):

$$n_r^* = \begin{cases} \left[\frac{10}{7}\right] + 1 = 2 \text{ для } 10 - \left[\frac{10}{7}\right] \times 7 = 3 - \text{ класса по 2 градации;} \\ \left[\frac{10}{7}\right] = 1 \text{ для } 7 \times \left(1 + \left[\frac{10}{7}\right]\right) - 10 = 4 \text{ класса по 1 градации.} \end{cases}$$

В результате получаем соответствие между градациями порядковых шкал:

$\{y_1\} \leftrightarrow \{x_1, x_2\}; \{y_2\} \leftrightarrow \{x_3\};\; \{y_3\} \leftrightarrow \{x_4\};\; \{y_4\} \leftrightarrow \{x_5, x_6\};\; \{y_5\} \leftrightarrow \{x_7\};\; \{y_6\} \leftrightarrow \{x_8\};\; \{y_7\} \leftrightarrow \{x_9, x_{10}\}$.

В табл. 1 представлено соответствие между балльными градациями со связанными рангами исходной и результирующей шкалой в соответствии с выражением (4).

Таблица 1. Соответствие между связанными рангами исходной и результирующей шкалами

Шкалы	**Балльные градации исходной и результирующей шкалы**						
X	1,5	3	4	5,5	7	8	9,5
Y	1	2	3	4	5	6	7

4. Заключение

Данный метод позволяет решать задачи многокритериального выбора, характеризующиеся оценками объектов, представленными неоднородными порядковыми (балльными) шкалами.

Для корректного применения аддитивного механизма агрегирования данных необходимо, чтобы оценки объектов по критериям, были представлены в однородных шкалах, т.е. с одинаковыми максимальными и минимальными значениями критериев, а также одинаковыми градациями порядковой шкалы.

Литература

1. *Steuer R.E.* Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. John Wiley & Sons, New York, 1986. – 546 p.
2. *Fishburn P.C.* Nonlinear preference and utility theory. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1988.
3. *Корнеенко В.П.* Метод локального агрегирования данных объектов с многоуровневой структурой в порядковых шкалах // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021): труды 14-й Междунар. конф. – М.: ИПУ РАН, 2021. С. 485–493.
4. *Кендэл М*. Ранговые корреляции. М.: Мир, 1975. – 216 с.