DOI: 10.25728/mlsd.2023.0138

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ[1]

Кушнер А.Г.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
kushner@physics.msu.ru

Аннотация. В докладе представлены некоторые результаты по управлению процессами в сплошных средах, полученные за последние годы в Лаборатории №6 ИПУ РАН. Эти результаты относятся ко многом физическим процессам: термодинамике, фильтрации, движению сред с молекулярной структурой. Единый подход основан на геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений, контактной и симплектической геометриях. Результаты нашли практическое применение в управлении процессами разработки нефтяных и газовых месторождений и управлении фазовыми переходами.

Ключевые слова: особенности решений, ударные волны, звуковые пучки, среды с внутренней структурой, лагранжевы и лежандровы многообразия, точные решения, симметрии, законы сохранения, управление.

Введение

Настоящий доклад представляет собой обзор некоторых результатов по теории управления нелинейными процессами в сплошных средах, полученных в лаборатории №6 ИПУ РАН за последние два десятилетия. Рассматриваемые задачи охватывают широкий круг нелинейных физических процессов, относящихся к акустике, термодинамике, фильтрации, средам с внутренней молекулярной структурой, магнитной гидродинамике.

Все эти процессы объединяет то, что они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. За последние десятилетия появились методы, позволяющие получать глубокие результаты при исследовании свойств решений таких уравнений.

1. Джеты и контактная структура

Мы остановимся на геометрической теории дифференциальных уравнений, восходящей к работам С. Ли, Г. Дарбу, А. Трессе, Э. Картана, методы которой в настоящее время развиваются в лаборатории.

Так, например, Софус Ли для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений и построения их точных решений впервые предложил использовать непрерывные группы, которые впоследствии были названы Г. Вейлем его именем и которые лежат в основе современной физики и дифференциальной геометрии – группы Ли. Он ввел понятие инфинитезимальных симметрий для обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. таких преобразований зависимых и независимых переменных, которые полученны в результате сдвига вдоль траекторий векторных полей. В последствии, почти спустя век после работ Ли, Л.В. Овсянников распространил этот метод на уравнения в частных производных. Это обобщение оказалось очень плодотворным благодаря в том числе и тому, что в отличие от обыкновенных уравнений, поиск инфинитезимальных симметрий уравнений в частных производных сводится к решению переопределенной линейной системы дифференциальных уравнений.

В семидесятых годах прошлого века на мехмате МГУ начал работать научный семинар А.М. Виноградова. Его постоянными участниками стали тогда еще студенты И.С. Красильщик, В.В. Лычагин, А.В. Самохин (ныне – сотрудники лаборатории №6 ИПУ РАН). На этом семинаре разрабатывался новый универсальный подход к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных. Этот подход основан на представлении дифференциальных уравнений многообразиями в некоторых специальных пространствах – пространствах джетов.

Само понятие джета было введено в 50-х годах XX века французским математиком Ш. Эресманном [1], который использовал его для нужд дифференциальной геометрии. По сути, k-джеты являются бескоординатными аналогами отрезков рядов Тейлора до степени k включительно. Именно их бескоординатное описание позволяет взглянуть на дифференциальные уравнения с инвариантной точки зрения, не зависящей от случайно выбранных координат.

На пространстве джетов существует дифференциально-геометрическая структура – неинтегрируемое распределение (т.е. не удовлетворяющее условиям теоремы Фробениуса), названное именем Картана. Это распределение позволило ввести понятие многозначного решения, которое, в

[1] *Работа поддержана РНФ, грант 23-21-00390*

свою очередь, было использовано для строгого определение разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений и описывать, тем самым, решения с особенностями (например, ударные волны).

Распределение Картана, будучи «максимально неинтегрируемым», определяет на пространстве 1-джетов контактную структуру. Автоморфизмы контактной структуры называются контактными преобразованиями. Таким образом, было расширено понятие симметрии дифференциального уравнения и вместо точечных преобразований (преобразований зависимых и независимых переменных) стало возможным рассматривать контактные преобразования, перемешивающие независимые, зависимые переменные и производные. Аналогом контактных преобразований в пространствах джетов более высокого порядка являются преобразования Ли. Детали см. в [2].

2. Управление сингулярными решениями и ударными волнами

Дифференциальные уравнения, возникающие в теории сплошных сред, как правило, являются нелинейными. Традиционный подход к нелинейным уравнениям состоит в их линеаризации путем отбрасывания нелинейных членов. Однако при этом возможна потеря важных свойств их решений и, как результат, неадекватность линейных моделей реальным процессам. Под сингулярными решениями дифференциальных уравнений понимают либо разрывные решения типа ударных волн, либо непрерывные решения, у которых имеют разрыв производные (так называемые контактные ударные волны или слабые разрывы). Наличие сингулярности создает известные трудности и при построении разностных схем: требуется измельчение шага сетки при приближении к поверхности разрыва, положение которой к тому же неизвестно, что не обеспечивает требуемую точность вычислений. В результате получаются грубые алгоритмы. Метод введения искусственной вязкости также не решает проблему точности вследствие размытия разрывов. Однако использование многозначных решений вместо классических может существенно упростить ситуацию.

В отличие от классического решения, проекция многозначного решения на пространство независимых переменных может иметь геометрические особенности – каустики. При удалении из графика многозначного решения точек каустики он распадется на куски, каждый их которых является графиком классического решения. Реальные разрывы решений не обязательно совпадают с геометрическими особенностями – за появление разрывов отвечают условия Гюгонио–Ренкина, которые записываются исходя из законов сохранения. Эти условия в простейшем случае представляют собой уравнения Гамильтона-Якоби, решения которых и определяют точки разрыва. В случае линейных уравнений всякому многозначному решению можно сопоставить обобщенное (в смысле С.Л. Соболева) решение. Таким образом, многозначные решения представляют собой естественное распространение теории обобщенных решений на нелинейные уравнения.

Описанная идея была применена нами к задачам нелинейной двухфазной фильтрации, описываемой уравнениями Бакли–Леверетта [3,4]. Эта модель применяется при управлении разработкой нефтяных месторождений путем вытеснения нефти водой. Соответствующее многозначное решение изображено на Рис. 1.

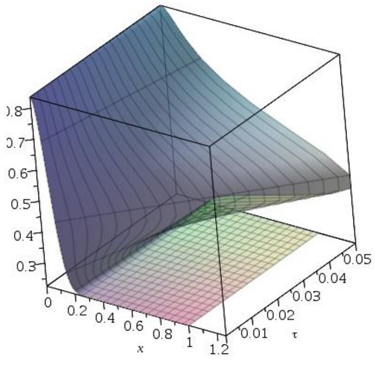

Рис. 1. Многозначное решение уравнения Бакли–Леверетта

Другой пример – задача управления ограниченным звуковым пучком, распространяющимся в нелинейной среде. В случае отсутствия диссипации процесс распространения звукового пучка описывается дифференциальным уравнением второго порядка – уравнением Хохлова–Заболоцкой, а при наличии диссипации – уравнением Кузнецова, которое имеет третий порядок. В работе [5] Лычагиным была найдена алгебра контактных симметрий и вычислены законы сохранения уравнения

Хохлова–Заболоцкой. Оказалось, что это уравнение обладает бесконечномерной алгеброй Ли симметрий, но большая часть из них не имеет физического смысла, так как переводит ограниченные решения в решения неограниченные на бесконечности. Отсев таких «нефизичных» симметрий позволил выделить конечномерную подалгебру и на её основе построить классы точных решений этого уравнения. Анализ этих решений позволил объяснить ранее наблюдавшееся в экспериментах явление самофокусировки звукового пучка, распространяющегося в нелинейных средах, например, в глицерине (см. Рис.2).

Более того, оказалось, что если амплитуду звукового пучка менять по гармоническому закону вблизи генератора звука, то на некотором расстоянии от него произойдет фокусировка пучка. Это явление уже существенно отличается от явления самофокусировки и указывает метод управления звуковым пучком. Решения уравнения Хохлова–Заболоцкой, моделирующие фокусировку, имеют слабый разрыв (разрыв производных) и их получение было основано на понятии многозначных решений дифференциальных уравнений. Отметим, что трехмерность пучка, по-видимому, играет существенную роль, т.к. для одно- и двумерных моделей решений, отвечающих режиму фокусировки, найти не удалось. Отметим, что наличие диссипации не разрушает явление фокусировки пучка.

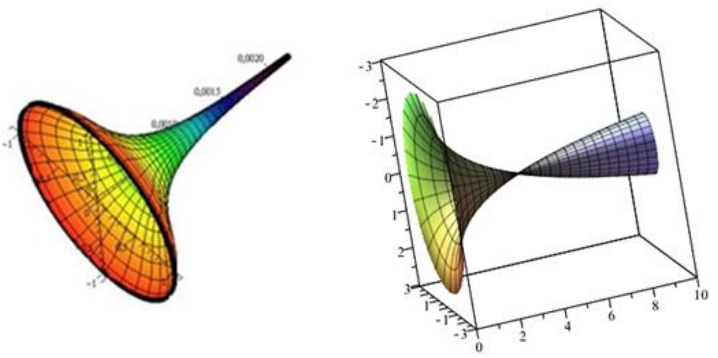

Рис. 2. Фокусировка звукового пучка в нелинейной среде (точное решение)

3. Управление термодинамическим состоянием газов

Проблема оптимального управления термодинамическими процессами представляет интерес еще с XIX века, когда была опубликована работа Карно, положившая начало изучению оптимальных тепловых машин. Геометрический подход восходит к работам Гиббса. Объединение первого и второго законов термодинамики привело его к так называемому «фундаментальному уравнению термодинамики».

С точки зрения современной дифференциальной геометрии, это уравнение представляет собой дифференциальную 1-форму на нечетномерном пространстве, координатами в котором являются экстенсивные и интенсивные переменные, а также энтропия. Эта дифференциальная 1-форма, которая сейчас называется формой Гиббса, не удовлетворяет условию теоремы Фробениуса и поэтому определяет максимально неинтегрируемое, т.е. контактное, распределение, которое называется распределением Гиббса. Таким образом, контактная геометрия является естественным языком для описания термодинамических процессов и систем. Это, в частности, объясняет популярность применения в термодинамике преобразования Лежандра, которое является контактным преобразованием, т.е. преобразованием, которое сохраняет распределение Гиббса. Переход от одних термодинамических переменных к другим осуществляется именно при помощи контактных преобразований.

В работе В.В. Лычагина [6] термодинамика рассматривается с точки зрения измерения случайных векторов, а именно экстенсивных переменных. Им применен подход к термодинамике, объединяющий контактную геометрию, теорию измерений и теорию оптимального управления. Термодинамические состояния в ней описываются как лежандровы и лагранжевы многообразия, на которых определена риманова структура, а именно, определена квадратичная форма, которая представляет собой дисперсию измерения экстенсивных величин. Такое геометрическое представление позволило использовать принцип максимума Понтрягина, чтобы найти оптимальный термодинамический процесс, максимизирующий функционал работы. Использование же римановых структур на термодинамических состояниях газов позволило сформулировать и решить задачу оптимального управления [7]. В результате применения принципа максимума в случае идеального газа получается вполне интегрируемая гамильтонова система, решение которой можно конструктивно построить в терминах переменных действие-угол с использованием теоремы Лиувилля–Арнольда.

Применённый подход к термодинамике позволяет использовать геометрические методы к описанию и исследованию многих физических процессов.

4. Управление фазовыми переходами

Система уравнений механики сплошных сред, как известно, состоит из дифференциальных законов сохранения энергии, массы (уравнение неразрывности) и импульса. При этом закон сохранения импульса в различных ситуациях принимает разнообразные формы. Например, в наиболее общем случае вязких сжимаемых сред это уравнение Навье- Стокса, для невязких сред он принимает вид уравнения Эйлера, а для сред, совершающих движение в пористой среде, это закон Дарси.

Кроме того, указанная система уравнений оказывается неполной. Для ее замыкания требуются дополнительные функциональные соотношения на термодинамические переменные, входящие в уравнения, такие как давление, температура, плотность, энергия и энтропия, называемые уравнениями состояния. Таким образом, термодинамика среды существенно влияет на ее движение.

Геометрическая формулировка термодинамических состояний как Лежандровых многообразий в некотором специальном термодинамическом контактном пространстве позволяет применить теорию лежандровых и лагранжевых особенностей В.И. Арнольда для анализа таких явлений как фазовые переходы — скачки среды из одного агрегатного состояния в другое (например, жидкость-газ).

А именно, область фазовых переходов определяется особенностями проекции термодинамических Лежандровых многообразий на подпространство интенсивных переменных (например, давление и температура). Подавляющее большинство таких Лежандровых многообразий, отвечающих термодинамическим состояниям реальных газов, обладают особенностью типа сборки. С другой стороны, сами уравнения нелинейны, а значит, их решения сами по себе могут иметь особенности. Эти два типа особенностей, а именно особенности решений нелинейных уравнений механики сплошных сред и особенности термодинамической природы, можно объединить вместе как «критические явления».

В частности, этот подход применим для описания фазовых переходов. Фазовые переходы возникают вблизи поверхности вырождения упомянутой выше квадратичной формы. Это дает возможность меняя термодинамические величины управлять процессом фазового перехода.

5. Среды с внутренней структурой

В классической теории сплошных сред за основу берётся макроскопическая модель. Её основное предположение состоит в том, что среда рассматривается как континуумом, и описание этого континуума дается в терминах макроскопических скоростей, давления, температуры, плотности и энтропии. На ограничения этого подхода указал Г. Биркгоф [12]. Он отметил, что для более адекватного описания некоторых процессов необходимо учитывать молекулярную структуру среды. Задолго до него братья Коссера [13] анализировали носители, состоящие из «жестких микроэлементов». Затем появились исследования (см. [14], например), в которых был развит подход к сплошным средам с учетом их микролокальной структуры. Идея о наличии у среды внутренней структуры приводит к более сложной картине.

Нами предложен единый подход к изучению сред, состоящих из линейных, плоских и пространственных молекул [15-18]. Под конфигурационным пространством жесткой молекулы понимается гладкое расслоение с базой, являющейся трехмерным римановым многообразием, слои которого являются однородными многообразиями. Для отражения взаимодействия молекулы со средой на этом расслоении введена связность. Движения молекул можно представить как комбинации поступательных движений их центров масс и вращений вокруг этих центров. Поэтому движение среды можно рассматривать как поток по некоторому проектируемому векторному полю на этом расслоении. На основе законов сохранения массы, импульса и энергии получены аналоги уравнений Навье–Стокса.

Построена термодинамическая модель движения однокомпонентной магнитной жидкости.

Рассмотрена задача оптимального управления фильтрацией газа по закону Дарси при постоянном термодинамическом потенциале. Построено общее решение нелинейной фильтрации нефти со взвешенными мелкими частицами в пористой среде и решена начально-краевая задача. Проведен групповой анализ уравнений фильтрации реальных газов в пористой среде: найдены симметрии, законы сохранения и классы точных решений. Исследована возможность применения нелинейных пилообразных волн для управления разработкой нефтяных месторождений.

6. Заключение

В этом обзоре мы коснулись только некоторых направлений исследований, проводимых в лаборатории №6 ИПУ РАН. В настоящее время ведется работа по

- разработке методов построения точных решений эволюционных уравнений, в частности, уравнений, описывающих фильтрацию суспензии и образования тромбов и пробок в пористой среде [19,20];
- управлению в термодинамическими свойствами мультикомпонентных систем [21];
- управлению потоками газа и жидкости по искривленным трубам [22] (это имеет применение в задачах транспортировки нефти и газа);
- управлению фильтрацией в пористых средах [23-28];
- управлению в магнитной гидродинамике [29];
- исследованию полулинейных эллиптических уравнений типа Колмлгорова-Петровского-Пискунова на многообразиях [30].

Основным аппаратом является геометрическая теория дифференциальных уравнени, а также контактная и симплектическая геометрии. Полный список публикаций сотрудников лаборатории можно найти на сайте Лаборатории №6 ИПУ РАН.

Литература

1. *Ehresmann C.* Introduction a la theorie des structures infinitesimales et des pseudo-groupes de Lie // Coll. Geom. Differ. Strasbourg, C.N.R.S. – 1953. – P. 97–110.
2. *Виноградов А.М.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений / А.М.Виноградов., И.С.Красильщик, В.В. Лычагин – М.: Наука, 1986 – 336 с.
3. *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME, SPE. – 1942. N 146. – P. 107–116.
4. *Akhmetzianov A.V.* Mass and heat transport in two-phase Buckley – Leverett's model / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. // J of Geom. and Phys. – 2016.
5. *Lychagin V.V.* Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations, and nonlinear phenomena // Acta Appl. Math. – 1985. – Vol. 3, N 2. – P. 135–173.
6. *Lychagin V.* Contact Geometry, Measurement, and Thermodynamics. In Nonlinear PDEs, Their Geometry and Applications; Kycia, R., Schneider, E., Ulan, M., Eds; Birkhäuser: Cham, Switzerland. – 2019. – P. 3–52.
7. *Kushner A*. Optimal Thermodynamic Processes For Gases / A. Kushner, V. Lychagin, M. Roop // Entropy. – 2020. – Vol. 22. – P. 448.
8. *Lychagin V., Roop M.* Real gas flows issued from a source //Analysis and Mathematical Physics. – 2020. – Vol. 10, N 1. Article 3. – P. 1–16.
9. *Lychagin V.* Critical Phenomena in Filtration Processes of Real Gases / V. Lychagin, M. Roop // Lobachevskii Journal of Mathematics. –- 2020. – Vol. 41, N 3. – P. 382-399.
10. *Kushner A.* Contact Geometry in Optimal Control of Thermodynamic Processes for Gases / A. Kushner, V. Lychagin, M. Roop // Doklady Mathematics. – 2020. – Vol. 102, N 1. – P. 346–349.
11. *Lychagin V.* Shock Waves in Euler Flows of Gases / V. Lychagin, M. Roop // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, N 12. – P. 2466–2472.
12. *Birkhoff G.* Hydrodynamics. A study in Logic, Fact, and Similitude. – 2nd edition. – Princeton University Press, 1960. – 184 pp.
13. *Cosserat E, Cosserat F.* Theorie des Corps Deformables. – Hermann, Paris, 1909.
14. *Седов Л.И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН. – 20:5(125). –1965. – С. 121–180.
15. *Duyunova A., Lychagin V., Tychkov, S.* Continuum mechanics of media with inner structures / A. Duyunova, V. Lychagin, S. Tychkov // Differential Geometry and its Applications. – 2021. – Vol. 74. – 101703.
16. *Lychagin, V.* Euler equations for Cosserat media // Global and Stochastic Analysis. – 2020. – Vol. 7, N 2. – P. 197–208.
17. *Kushner A., Lychagin V.* Generalized Navier-Stokes Equations and Dynamics of Plane Molecular Media / A. Kushner, V. Lychagin // Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – P. 288.
18. *Duyunova A.* Symmetries and Differential Invariants for Inviscid Flows on a Curve A. Duyunova, V. Lychagin, S. Tychkov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, N 12. – P. 2435–2447.
19. *Kushner A*. Dynamics of evolutionary differential equations with several spatial variables // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. N 2. – Special Issue Dynamics and Control Theory with Applications. – P. 1–11.
20. *Lychagin V.* Finite-Dimensional Dynamics in Nonlinear Heat Transfer // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, N 4. – P. 1407–1415.
21. *Lychagin V.* On Thermodynamics of Multicomponent Systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. –Vol. 44, N 9. – P. 3951–3961.

22. *Duyunova A.* Quotient of the Euler system on one class of curves / A. Duyunova, V. Lychagin, S. Tychkov // Journal of Geometry and Physics. – 2022. – Vol. 173. – P. 104432.
23. *Kostiuchek M.* Gas Filtration at Constant Thermodynamic Potential // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, N 10. – P. 2746–2756.
24. *Kushner A.* Integration of the Deep Bed Filtration Equations / A. Kushner, S. Mukhina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. N 10. – P. 2785–2792.
25. *Lychagin V.* On Darcy–Forchheimer Flows in Porous Media // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, N 10. – P. 81–84.
26. *Krasil'shchik I.* The equation of filtration for real gases: group classification, exact solutions, conservation laws, and differential invariants / I.Krasil'shchik, O. Morosov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol 43, N 10. – P. 2781–2784.
27. *Samokhin A.* Taylor Trick and Travelling Wave Solutions // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, N 10. – P. 2808–2815.
28. *Akhmetzianov A.* Nonlinear Wave Control Actions to Increase Oil Recovery of Natural Reserves / A. Akhmetzianov, A. Samokhin // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, N 5. – P. 721–733.
29. *Ryabushev E*. Differential Invariants of the Magnetohydrodynamics Under an Action of the Motion Group // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43, N 10. – P. 2802–2807.
30. *Tunitsky D.* On solvability of semilinear second-order elliptic equations on closed manifolds // Izvestiya: Mathematics. – 2022. – Vol. 86, N 5. – P. 925–942.